Занятие 1
Дискретная непрерывность

Разберем несколько задач, выявив общие идеи их решения.

Пример 1.1. В ряд выписаны целые числа, причем каждые два соседних отличаются ровно на 1. Самое левое число равно –10, а самое правое равно 10. Докажите, что в этом ряду есть число 0.

Решение. Будем идти по ряду слева направо, пока не встретим первое положительное число. Предыдущее число не будет положительным. По условию два этих числа отличаются на единицу, поэтому положительное число равно 1, а предыдущее число – это 0.

Проанализируем это решение подробнее. Мы рассматривали числовой ряд, в котором соседние числа отличаются на 1 (наименьшее возможное целое значение), без «перескока». Мы доказали, что если в такой последовательности есть и отрицательные, и положительные числа, то в ней есть число 0.

Таким же образом можно доказать и более общее утверждение, которое сформулируем так: ***Пусть последовательность целых чисел такова, что соседние числа отличаются не более, чем на единицу. Пусть также m – наименьший член этой последовательности, а M – наибольший (не обязательно единственные)*. Тогда, *какое бы целое число n между ними мы ни взяли (m ≤ n ≤ M), найдется член последовательности, равный числу n.***

Например, если наименьшее из чисел в такой последовательности – это 3, а наибольшее – 7, то в ней обязательно найдутся числа 4, 5 и 6.

*В таких случаях говорят, что имеет место **«дискретная непрерывность»**, а это утверждение выражает ее основное свойство, называемое **«теоремой о промежуточном значении»**. Оно аналогично свойству непрерывных функций с действительной переменной, которое будет сформулировано позднее*.

Методы решения задач, основанные на этой теореме, обычно сводятся к следующему. Вводится некоторая величина, доказывается ее дискретная непрерывность (мы будем называть такую величину ***дискретно непрерывной величиной – ДНВ***), вычисляются значения данной величины для крайних положений и для доказательства того, что ДНВ принимает требуемое значение, применяется ***теорема о промежуточном значении***.

В рассмотренном примере в качестве ДНВ выступает заданная последовательность чисел, в качестве крайних значений – самое левое и самое правое число, а в качестве требуемого значения ДНВ – число 0.

Пример 1.2. Первый тайм футбольного матча закончился со счетом 0 : 1, а матч – со счетом 4 : 3. Докажите, что в некоторый момент счет на табло был ничейным.

Решение. Рассмотрим разность между мячами, забитыми первой и второй командами. После первого тайма она была равна –1, а после второго стала равной 1. Поскольку при каждом забитом мяче эта разность изменяется на 1, то в некоторый момент она принимает промежуточное значение 0. В этот момент на табло и будет ничейный счет.

Отметим несколько моментов, существенных для дальнейших обсуждений:

1) В задаче присутствует процесс (изменение счета матча).

2) Можно ввести некоторую величину (в данном случае – разность забитых и пропущенных мячей), которая на каждом шаге изменяется не более чем на 1.

3) В данном случае удобно было использовать именно разность, поскольку заданные в условии величины в рассматриваемом процессе как бы меняются местами (после первого тайма меньше очков было у первой команды, а после второго тайма – у второй).

4) Мы доказали наличие ничейного счёта ***неконструктивно***, а именно, мы не можем явно указать ни сам этот счёт, ни момент матча, в который его можно было наблюдать, но строго доказали, что такой момент действительно был.

Отметим, что использование в качестве ДНВ разности двух величин – это весьма распространенный прием для решения задач, в которых требуется доказать равенство двух значений.

Пример 1.3. Существуют ли сто последовательных натуральных чисел, среди которых ровно пять простых?

Решение. Если в предыдущих задачах мы использовали соображения дискретной непрерывности там, где ответ был в общем-то очевиден, то в данной задаче на поставленный вопрос сложно ответить «с ходу». На самом деле, такие числа существуют. Мы не сможем их назвать, но факт существования этих чисел докажем строго.

Хорошо известно, что среди первых ста натуральных чисел много простых (гораздо больше пяти). Хорошо бы найти набор из ста чисел, в котором простых чисел мал*о* (меньше пяти) или их нет совсем. Например, можно рассмотреть такой набор чисел: 101! + 2, 101! + 3, …, 101! + 101. Каждое из этих чисел – составное: первое делится на 2, второе – на 3, …, последнее – на 101. Таким образом, простых чисел среди них нет.

Теперь будем последовательно рассматривать сотни чисел:

1, 2, 3, …, 99, 100;

2, 3, …, 99, 100, 101;

3, …, 99, 100, 101, 102;

…………………………

101! + 2, …, 101! + 100, 101! + 101.

При переходе от каждой сотни к следующей мы удаляем одно число слева и добавляем одно новое число справа, поэтому количество простых чисел не может при этом уменьшиться или увеличиться больше, чем на 1. Поскольку в первой сотне простых числе больше пяти, а в последней – меньше пяти, то в промежутке найдется сотня, в которой ровно пять простых чисел, что и требовалось.

Обратите внимание, что в отличие от предыдущей задачи, в условии этой задачи процесса нет – нам пришлось его самим организовать!

Задачи для самостоятельного решения.

1.1. На доске было записано число 1. За один шаг число, имеющееся на доске, либо умножали на произвольное однозначное число, либо прибавляли к нему произвольное однозначное число, и результат записывали вместо него. Через некоторое время на доске оказалось записано стозначное число. Верно ли, что в какой-то момент на доске было записано тридцатизначное число?

Ответ: да, верно.

Решение. При выполнении указанных операций каждое новое число отличается от предыдущего менее, чем в 10 раз. Поэтому количество знаков в числе либо не изменялось, либо увеличивалось на 1. Значит, в какие-то моменты на доске были записаны числа с любым количеством знаков от 2 до 99, в том числе и тридцатизначное число.

1.2. В ряд выложены 200 шаров, из них 100 черных и 100 красных, причем первый и последний шары – черные. Докажите, что можно убрать с правого края несколько шаров подряд так, чтобы красных и черных шаров осталось поровну.

Решение. Пусть убрано k шаров справа. При $k = 1$ останется 99 черных шаров и 100 красных, то есть черных шаров останется меньше, чем красных. При $k = 199$ останется 1 черный шар и 0 красных, то есть черных шаров останется больше, чем красных. При изменении значения k на 1 значение разности между количествами черных и красных шаров изменяется на 1. Следовательно, найдется такое натуральное число k ($2 \le k \le 198$), что эта разность равна нулю, то есть черных и красных шаров останется поровну.

Еще раз обратим внимание на тот факт, что мы можем доказать только возможность требуемой ситуации, но не можем указать конкретно, сколько именно шаров потребуется убрать.

1.3. Матч «Бавария» – «Спартак» закончился со счетом 5 : 8. Муж (болеющий за «Баварию») и жена (болеющая за «Спартак») собираются посмотреть этот матч в записи по очереди, уже зная итоговый счет: сначала смотрит муж (а жена сидит с ребенком), а в некоторый момент они меняются. Докажите, что они смогут поменяться так, чтобы увидеть поровну мячей, забитых любимой командой.

Решение. В начале матча сумма мячей, забитых обеими командами, равнялась нулю, а в итоге такая сумма равна 13, причем эта величина каждый раз изменялась на 1. Следовательно, по ходу матча обязательно был такой момент, когда в сумме было забито столько мячей, сколько в итоге забил «Спартак», то есть 8 мячей. В этот момент и должна произойти смена.

Действительно, если из этих восьми мячей «Спартак» забил x, то «Бавария» забила $(8 – x)$ мячей. Значит, после этого момента «Спартак» забил $(8 – x)$ мячей, то есть столько же, сколько «Бавария» до этого.

Отметим, что может случиться так, что каждый из них увидит только голы «чужой» команды (если $x = 8$), но условие задачи будет выполнено!

В данном случае, используя ДНВ, мы не только доказали возможность смены, но и конкретно указали, когда она должна произойти: после того, как сумма забитых мячей станет равна 8, но до того момента, когда будет забит следующий мяч.

1.4. Шеренга новобранцев стояла лицом к сержанту. По команде «Нале-во!» некоторые из них повернулись налево, некоторые – направо, а остальные – кругом. Всегда ли сержант сможет встать в строй так, чтобы с обеих сторон от него оказалось поровну новобранцев, стоящих к нему лицом?

Ответ: да, всегда.

Решение. Если сержант стоит в строю, то обозначим количество человек, стоящих к нему лицом, слева и справа от него, через m и n соответственно. Пусть сначала сержант встанет на левый фланг шеренги. Тогда слева от него не будет никого ($m = 0$). Если и справа от сержанта никто не будет стоять к нему лицом ($n = 0$), то задача решена.

В противном случае ($n > 0$) пусть сержант идёт слева направо от человека к человеку. Если он проходит новобранца, стоявшего к нему спиной, то число m увеличивается на 1, а число n не изменяется. Если сержант проходит новобранца, стоявшего к нему лицом, то число n уменьшается на 1, а число m не изменяется. Если же этот новобранец стоит боком, то оба числа m и n не изменяются.

Таким образом, вначале число $(m – n)$ отрицательно, а в процессе движения сержанта вдоль строя может увеличиваться не более чем на 1 после прохождения каждого новобранца. Но, в тот момент, когда сержант дойдёт до правого края шеренги, уже n будет равно нулю, значит, число $(m – n)$ будет неотрицательным.

Итак, начав с отрицательного значения $(m – n)$ и прибавляя к нему несколько раз по единице, мы получили неотрицательное число. Значит, в какой-то момент мы должны были получить ноль. В этот момент $m = n$, то есть с обеих сторон от сержанта лицом к нему находилось поровну новобранцев.

1.5. Некто расставил в произвольном порядке десятитомное собрание сочинений. Назовем «беспорядком» пару томов (не обязательно соседних), в которой том с большим номером стоит левее. Для некоторой расстановки томов подсчитано количество всех «беспорядков». Какие значения оно может принимать?

Ответ. Любые целые значения от 0 до 45.

Решение. Очевидно, что количество «беспорядков» не меньше нуля, но не больше, чем количество всевозможных пар из 10 томов (оно равно $\frac{10 \cdot 9}{2} = 45$). Покажем, что любое из целых значений от 0 до 45 может достигаться при некоторой расстановке томов. Вначале расставим все тома строго в обратном порядке. Тогда каждая пара томов будет являться «беспорядком», то есть общее количество «беспорядков» равно 45.

Из этой расстановки можно получить расстановку томов в правильном порядке, меняя местами на каждом шаге только два соседних тома. Действительно, поменяем сначала десятый том с девятым, затем десятый – с восьмым, и так далее, пока десятый том не окажется правее всех остальных. Затем ту же операцию проделаем с девятым томом, затем с восьмым, седьмым, ..., со вторым.

При правильной расстановке томов количество «беспорядков» равно нулю, а при обмене местами двух соседних томов количество беспорядков либо увеличивается на 1, либо уменьшается на 1.

Таким образом, будет достигнуто каждое количество беспорядков от 0 до 45.

Обратите внимание, что решение данной задачи состоит из двух частей, которые обычно называют «оценка» и «пример»: во-первых, показано, что количество «беспорядков» не может быть меньше нуля и не может быть больше, чем 45, а во-вторых, показано, что каждое значение от 0 до 45 достигается.

При этом, вместо того, чтобы приводить 46 конкретных примеров, мы привели примеры лишь для 45 и для 0 «беспорядков», после чего провели рассуждение, доказывающее, что количество беспорядков принимает также и все промежуточные значения.

*Отметим также, что при решении данной задачи мы воспользовались алгоритмом выстраивания томов в правильном порядке путем последовательного обмена местами соседних томов. В программировании такой алгоритм называют **сортировка «пузырьком»**.*

1.6. В ряд стоят 20 сапог: 10 правых и 10 левых. Обязательно ли среди них найдутся 10 сапог, стоящих подряд, среди которых поровну правых и левых?

Ответ: да, обязательно.

*До сих пор мы тщательно старались избегать алгебраического формализма, считая, что это занятие рассчитано на школьников, еще не обладающих соответствующей техникой. В некоторых случаях это усложняло изложение доказательства. На примере решения этой задачи покажем, каким образом, при помощи введения разумных определений и обозначений, можно добиться более явного применения **теоремы о промежуточном значении**.*

Решение. Занумеруем сапоги слева направо натуральными числами от 1 до 20. Для каждых десяти сапог с номерами n, $n + 1$, …, $n + 9$ рассмотрим величину d_n – разность между количествами левых и правых сапог среди этих десяти. Заметим, что $d_1 + d_{11}$ – это разность между количеством левых и правых среди всех двадцати сапог, поэтому $d_1 + d_{11} = 0$. Следовательно, либо $d_1 = d_{11} = 0$, либо d_1 и d_{11} – противоположные числа разных знаков.

В первом случае можно выбрать первые 10 сапог (слева или справа) и утверждение задачи будет выполнено.

Во втором случае рассмотрим два произвольных соседних члена последовательности $\{d_n\}$: d_n и d_{n+1}. При вычислении значения d_{n+1} мы, по сравнению с вычислением d_n, не учитываем n-й сапог, но учитываем (n + 10)-й. Если оба эти сапога – правые, либо если они оба – левые, то $d_n = d_{n+1}$. Если же один из этих сапог правый, а другой левый, то d_n отличается от d_{n+1} на 2 (в большую или в меньшую сторону). Кроме того заметим, что среди десяти сапог либо четное количество как левых, так и правых, либо нечетное. Поэтому их разность d_n – всегда число четное.

Рассмотрим теперь целочисленную последовательность $\{\frac{d_n}{2}\}$. Ее соседние члены отличаются не более, чем на 1, а числа $\frac{d_1}{2}$ и $\frac{d_{11}}{2}$ имеют разные знаки, следовательно, по теореме о промежуточном значении, найдется член $\frac{d_k}{2}$ этой последовательности, равный нулю ($1 < k < 11$). Тогда и $d_k = 0$, то есть условию задачи удовлетворяют 10 сапог, начиная с сапога с номером k.

Еще раз хотим предостеречь: для школьников, хорошо владеющих соответствующей техникой, введение удобных обозначений и рассуждение на алгебраическом языке облегчают доказательство и делают его более стереотипным. Для школьников, еще не обладающих такими навыками, попытка *использования большого количества обозначений и проведение формальных рассуждений приведет к тому, что основные идеи темы усвоены не будут*.

1.7. В бесконечной последовательности натуральных чисел каждое следующее число получается прибавлением к предыдущему одной из его ненулевых цифр. Докажите, что в этой последовательности найдется четное число.

Решение. Заметим, что соседние числа данной последовательности отличаются меньше, чем на 10. Отбросим у каждого числа последнюю цифру. Получим новую последовательность, в которой соседние числа отличаются не более, чем на 1. Так как эта последовательность бесконечна и каждый ее член не меньше предыдущего, то в ней встречаются все натуральные числа, начиная с некоторого. В частности, в ней найдется число, которое записывается только нечетными цифрами (например, число вида 99...9).

Соответствующее число в исходной последовательности либо четно, либо также состоит только из нечетных цифр. Во втором случае следующее за ним число обязано быть четным.

Дополнительные задачи

Д1. К автомату с газированной водой стояла очередь из ста гномов. Газировка бывает двух сортов: с сиропом – за 3 копейки и без сиропа – за 1 копейку. Самый первый гном купил газировку с сиропом, а второй – без сиропа. Верно ли, что в некоторый момент гномов, уже купивших газировку с сиропом было столько же, сколько гномов, собиравшихся купить газировку без сиропа?

Ответ: да, верно.

Решение. В каждый момент времени будем рассматривать разность между количеством гномов, купивших газировку с сиропом, и количеством гномов, которые собираются купить газировку без сиропа. В самом начале эта разность отрицательна (уменьшаемое равно 0, а вычитаемое не меньше, чем 1, так как известно, что второй гном хочет купить воду без сиропа). А в конце, когда все гномы уже купили воду, эта разность положительна (уменьшаемое не меньше единицы, так как первый гном купил воду с сиропом, а вычитаемое равно нулю, поскольку больше желающих покупать воду нет). После каждой покупки эта разность изменяется не более, чем на 1, поэтому в некоторый момент она была равна нулю.

Д2. В стране Ш. человек считается богатым, если его зарплата больше зарплаты премьер-министра. В этой стране богатые мужчины предпочитают выходить замуж за бедных женщин. Докажите, что можно премьер-министру установить такую зарплату, чтобы количество богатых мужчин было в точности равно количеству бедных женщин. (Все зарплаты в стране различные.)

Решение. Рассмотрим разность между количествами богатых мужчин и бедных женщин. Заметим, что при постепенном изменении зарплаты премьер-министра эта величина изменяется дискретно непрерывно. Если установить премьер-министру зарплату, равную 0, то все мужчины будут богатыми, а бедных женщин не будет вовсе, то есть рассматриваемая величина будет положительной. Если же премьер-министру назначить очень большую зарплату, то все мужчины окажутся бедными, и интересующая нас величина будет отрицательной. Следовательно, ***по теореме о промежуточном значении***, найдется такое значение зарплаты, когда разность между количествами богатых мужчин и бедных женщин будет равна нулю, что и требовалось.

Д3. Петя записал в ряд несколько чисел так, что любые два соседних отличаются не больше, чем на 1. Самое маленькое из этих чисел равно –5, а самое большое – это 100,25. Докажите, что хотя бы одно из записанных чисел отличается от нуля не больше, чем на 0,5.

Решение. Среди записанных чисел есть положительные. Рассмотрим первое из них. Если оно не больше, чем 0,5, то оно и является искомым. В противном случае (если оно больше, чем 0,5) предыдущее число – неположительное и оно больше, чем –0,5, значит, искомым будет оно.

Д4. Плоскость раскрашена в два цвета. Докажите, что найдутся точки разного цвета на расстоянии 1.

Решение. Выберем две точки разного цвета. Построим ломаную с концами в этих точках, все звенья которой имеют длину 1 (*это можно сделать, так как «степень свободы» достаточно велика*). Будем двигаться по звеньям этой ломаной, начав с любого из концов. Тогда, так как концы этой ломаной разного цвета, то рано ли поздно, найдется звено у которого вершины имеют разный цвет. Эти точки и будут искомыми.

При решении этой задачи школьники часто пытаются апеллировать к таким понятиям, как «соседняя точка», «граница между областями двух цветов», и тому подобное. У учителя должны быть наготове примеры, опровергающие такие рассуждения.

Д5. Дракон заточил рыцаря в темницу и выдал ему 100 различных монет, половина из которых – фальшивые (но какие именно – знает только дракон). Каждый день рыцарь раскладывает монеты на две кучки (не обязательно равные). Если в какой-то день в этих кучках окажется поровну настоящих монет, либо поровну фальшивых, то дракон отпустит рыцаря. Сможет ли рыцарь гарантированно освободиться не позже, чем на двадцать пятый день?

Ответ: да, сможет.

Решение. В первый день разложим монеты на две кучки: в первой – 49 монет, а во второй – 51 монета. Монет какого-то сорта (скажем, фальшивых) в первой кучке не менее половины, то есть не менее, чем 25. Каждый день будем перекладывать по одной монете из первой кучки во вторую. Тогда на 25-й день в первой кучке останется 25 монет, из них фальшивых – не более, чем 25. Таким образом, в первой кучке фальшивых монет было не менее 25, а стало не более 25, и каждый день это количество изменялось не более чем на 1, следовательно, в какой-то день их было ровно 25. Тогда в этот день и во второй кучке фальшивых монет было ровно 25, значит, в этот день рыцарь освободился.

Д6. Школьники играли в настольный теннис «на победителя». Они установили очередь и правила: вначале играют первый и второй, а в дальнейшем каждый очередной участник играет с победителем предыдущей пары. На следующий день те же школьники снова сыграли по тем же правилам, но очередь шла в обратном порядке (вчерашний последний стал первым, предпоследний – вторым, и так далее). Известно, что каждый сыграл хотя бы раз и в первый день, и во второй. Докажите, что найдутся два школьника, которые играли между собой и в первый день, и во второй.

Решение. Пусть школьник *А* был последним в очереди в первый день и свою первую партию сыграл со школьником *Б*. Тогда *Б* – либо предпоследний, либо выиграл у всех, кто стоял в очереди между ним и *А*. Тем самым, *Б* сыграл со всеми, кто стоял в очереди после него.

На следующий день все эти школьники (и только они!) окажутся в очереди впереди *Б*, поэтому свою первую партию он сыграет с кем-то из них.

www.ashap.info/Knigi/Matkruzhki/12-Neprer.html