

А. А. Заславский, Б. Р. Френкин,
А. В. Шаповалов

Задачи о турнирах

Издательство МЦНМО
Москва, 2013

УДК 51(07)

ББК 22.1

336

Заславский А. А., Френкин Б. Р., Шаповалов А. В.
336 **Задачи о турнирах. — М.: МЦНМО, 2013.—**
104 с.: ил.

ISBN 978-5-4439-0601-0

Десятая книжка из серии «Школьные математические кружки» посвящена задачам о спортивных турнирах и ориентирована в первую очередь на школьников 6–9 классов. В неё вошли разработки шести занятий математического кружка, а также более 50 дополнительных задач разной сложности. Первые три занятия рассчитаны на начинающих школьников, следующие три — на более подготовленных.

Брошюра адресована руководителям математических кружков и школьным учителям математики. Надеемся, что она будет интересна школьникам, их родителям, а также всем любителям математики, видящим её не только в учебниках, но и в спорте, а также в других проявлениях окружающей нас жизни.

*Алексей Александрович Заславский, Борис Рафаилович Френкин,
Александр Васильевич Шаповалов*

Задачи о турнирах

Серия «ШКОЛЬНЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ КРУЖКИ»

Технический редактор *Е. Горская*

Иллюстрации *А. Неледва*

Лицензия ИД № 01335 от 24.03.2000 г. Подписано в печать 1.09.2013 г.
Формат 60 × 88 ¹/₁₆. Бумага офсетная. Печать офсетная. Объем 6 ¹/₂ печ. л.
Тираж 3000 экз.

Издательство Московского центра непрерывного математического образования
119002, Москва, Большой Власьевский пер., 11. Тел. (499)-241-74-83.

Отпечатано с готовых диапозитивов в ООО «Принт Сервис Групп»
105187, Москва, Борисовская ул., д. 14.

ISBN 978-5-4439-0601-0

© МЦНМО, 2013

Предисловие

Задачи о спортивных соревнованиях регулярно появляются на математических олимпиадах. Двое из авторов этой брошюры попытались собрать наиболее интересные и характерные задачи такого содержания в брошюре «Математика турниров», изданной в 2009 г. (см. список литературы в конце предисловия.) Данное издание пересекается с ней по содержанию, но имеет другую цель: авторы предназначают его *для использования в математических кружках*, рассчитывая на достаточно широкий контингент школьников.

Предлагаемые задачи могут составлять темы отдельных занятий или использоваться в рамках других тем, например, таких как «Графы», «Принцип Дирихле», «Суммирование двумя способами» и др. Здесь может принести пользу *указатель задач по темам в конце брошюры*.

Мелким шрифтом набраны пояснения для руководителя занятия. Основной материал разбит на 6 занятий. Их можно ставить подряд или вразбивку, между занятиями другого содержания (или, скажем, дать два занятия по турнирам подряд, а остальные вразбивку). Это может способствовать поддержанию интереса к теме турниров. В большинстве случаев задачи разных занятий решаются независимо друг от друга, поэтому порядок занятий в принципе можно менять.

Номер задачи состоит из номера занятия и номера задачи в занятии, разделённых точкой. В каждом занятии вначале идут задачи, рекомендуемые для решения и разбора непосредственно на кружке, причём после каждой из них приводится ответ и решение, а нередко также комментарии к методу решения. Далее идут задачи для самостоятельного решения. Ответы и решения к ним приводятся после списка этих задач. Отдельный раздел содержит дополнительные задачи. После каждого занятия приведён список дополнительных задач, которые можно добавить к материалу занятия. С другой стороны, часть задач можно при необходимости снять. *Главное — не количество решённых задач, а усвоение идей и приёмов, лежащих в основе решения.*

В конце брошюры приведён раздаточный материал, который состоит из задач каждого занятия на отдельных листках.

Дальнейшие сведения по математике турниров можно найти в литературе, указанной в конце предисловия.

Задачи о турнирах, как правило, наглядны по формулировке, и их решение требует сообразительности, а не каких-то специальных знаний. Поэтому мы не указываем класс школы, для которого предназначена та или иная задача. Простейшие из них заведомо доступны начиная с 5 класса.

Занятие 1 ориентировано преимущественно на 5–7 классы, а занятие 4 на старшие классы. Задачи с произвольным числом участников, партий и т. п. можно давать и с конкретными числами, в особенности в младших классах, где очень существенна наглядность формулировки.

На первом занятии нужно напомнить простейшие понятия, связанные с турнирами (турнирная таблица, системы организации турниров и начисления очков).

Турнир — это в принципе любое соревнование, где количество участников больше двух. Содержание турнира может быть самым разным: футбол, шахматы, решение математических задач и т. д. Для нас сейчас важно другое: схема организации турнира и подсчёта очков.

Широко распространены *однокруговые турниры*, когда каждый участник встречается с каждым один раз — играет с ним один *матч (партию)*. О таких турнирах чаще всего и идёт речь в этой книжке. Бывают и *многокруговые турниры*, когда каждая пара участников встречается несколько раз. Чаще всего за выигранную партию начисляется 1 очко, за ничью пол-очка, за проигрыш 0 (*шахматная система подсчёта очков*). Такая система обычно подразумевается в дальнейшем. В некоторых видах соревнований за победу начисляется 2 очка, за ничью 1, за проигрыш 0. А в *футболе* за выигрыш начисляется 3 очка, за ничью 1, за проигрыш 0. Турниры по «большому» и настольному *теннису*, а также *волейболу* имеют ту специфику, что в них невозможны ничьи. Бывают и другие схемы организации турниров. В частности, при *кубковой, или олимпийской системе* (см. занятие 6) турнир состоит

из нескольких туров, в каждом из которых участники проводят по одной встрече и проигравший «вылетает» (если в туре участвует нечётное число спортсменов, то один из них по жребью «отдыхает» и проходит в следующий тур).

Сумма очков, набранных спортсменом во всех партиях, является его *результатом*. Отдельную партию называют *результативной*, если она закончилась победой одного из участников, и *ничейной* в противном случае.

Итоги турнира оформляются в виде *турнирной таблицы*. Каждая её строка и каждый столбец соответствует одному из игроков (участников турнира). На пересечении какой-либо строки А и столбца Б стоит результат встречи игрока А с игроком Б. (В некоторых задачах вы увидите и другие таблицы, где, например, указано количество забитых и пропущенных мячей.)

Перечисленные термины дальше употребляются, как правило, без пояснения.

Авторы благодарны А. Д. Блинкову за дополнительный материал и ценные замечания, позволившие значительно улучшить брошюру.

Использованная литература

1. Блинков А. Д., Горская Е. С., Гуровиц В. М. (составители). *Московские математические регаты*. — М.: МЦНМО, 2007.

2. Гуровиц В. М., Ховрина В. В. *Графы* (изд. 2-е, исправленное). — М.: МЦНМО, 2011.

3. Заславский А. А., Френкин Б. Р. *Математика турниров*. — М.: МЦНМО, 2009.

4. Медников Л. Э. *Чётность*. — М.: МЦНМО, 2009.

5. Медников Л. Э., Шаповалов А. В. *Турнир городов: мир математики в задачах*. — М.: МЦНМО, 2012.

6. Толпыго А. К. *Тысяча задач международного математического Турнира городов* (изд. 2-е, дополненное). — М.: МЦНМО, 2010.

7. Фёдоров Р. М., Канель-Белов А. Я., Ковальджи А. К., Яценко И. В. *Московские математические олимпиады 1993–2005 г.* (изд. 2-е, исправленное и дополненное). — М.: МЦНМО, 2008.

8. Шаповалов А. В. *Как построить пример?* — М.: МЦНМО, 2013.

9. Шаповалов А. В. *Принцип узких мест* (изд. 3-е, дополненное). — М.: МЦНМО, 2012.

10. Шаповалов А. В., Медников Л. Э. *XVII Турнир математических боёв им. А. П. Савина*. — М.: МЦНМО, 2012.

Использованы также материалы турниров им. А. П. Савина прошлых лет и задачи с различных соревнований школьников, опубликованные в Интернете, — см., например,

<http://olympiads.mccme.ru/mmo>,

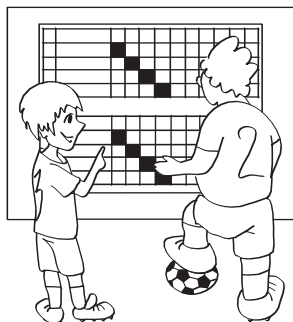
<http://www.turgor.ru/problems>,

<http://olympiads.mccme.ru/regata>.

Занятие 1

Восстанови результаты

Знакомство с турнирами младшие школьники (5–7 класс) обычно начинают с задач, где дана частично заполненная турнирная таблица и надо восстановить недостающие данные. Сначала это кажется волшебством: почти из ничего получить всё. Особых знаний тут не требуется, достаточно умения логически мыслить. С точки зрения обучения, восстановление таблиц занимает ту же нишу, что и решение числовых ребусов. Но возня с таблицами и их возможными вариантами для любителя спорта вещь естественная, тогда как ребусы для многих — задачи искусственные. И хотя к ребусам легче привыкнуть, зато задачи про таблицы лучше развивают совершенно необходимый навык перевода с обычного языка на математический. Методы решения кажутся простыми, но они достаточно фундаментальны: перебор, принцип крайнего, принцип узких мест, оценка. На эти приёмы стоит обращать внимание при обсуждении решения задач — мягко, но регулярно.



Их возможными вариантами для любителя спорта вещь естественная, тогда как ребусы для многих — задачи искусственные. И хотя к ребусам легче привыкнуть, зато задачи про таблицы лучше развивают совершенно необходимый навык перевода с обычного языка на математический. Методы решения кажутся простыми, но они достаточно фундаментальны: перебор, принцип крайнего, принцип узких мест, оценка. На эти приёмы стоит обращать внимание при обсуждении решения задач — мягко, но регулярно.

Школьники 8 класса и старше могут начинать со второго занятия. В любом случае необходимо напомнить основные понятия, связанные с турнирами (см. предисловие).

Начнём со следующей несложной задачи.

Задача 1.1. Команда «Вымпел» во втором матче турнира забросила больше шайб, чем в первом, а в третьем матче — на 6 шайб меньше, чем в двух первых вместе взятых. Известно, что в этих трёх матчах «Вымпел» забросил 6 шайб. Мог ли «Вымпел» выиграть все 3 матча?

Ответ: не мог.

Решение. В первых двух матчах «Вымпел» забросил не больше шести шайб. Но и не меньше шести, так как в третьем матче «Вымпел» забросил на 6 шайб меньше. Значит, это число равно 6, и в третьем матче «Вымпел» забросил 0 шайб. Поэтому третий матч «Вымпел» не выиграл.

Путь к решению. Узким местом (где меньше всего неопределённости) оказалась сумма заброшенных шайб в двух первых матчах. Мы её «зажали с двух сторон» и однозначно определили. Важно и то, что число забитых шайб в третьем матче оказалось *крайним*, то есть наименьшим из возможных.

Задача 1.2. Аня, Боря, Валя и Гена сыграли однокруговой турнир в крестики-нолики и начали заносить результаты в турнирную таблицу (В — число выигрышей, Н — ничьих, П — поражений). Они успели заполнить только 4 клетки (см. рис.). Заполните все остальные клетки.

	Аня	Боря	Валя	Гена	В	Н	П
Аня						2	
Боря						1	
Валя					3		
Гена							1

Ответ: см. таблицу: выигрыш +, ничья =, проигрыш −.

	Аня	Боря	Валя	Гена	В	Н	П
Аня		=	−	=	0	2	1
Боря	=		−	−	0	1	2
Валя	+	+		+	3	0	0
Гена	=	+	−		1	1	1

Решение. Валя выиграла три игры, значит, выиграла у всех. Аня проиграла Вале, значит, две её ничьи — с Борей и Геной. Боря и Гена не сыграли вничью, иначе у Бори было бы две ничьи. Но Гена Боре и не проиграл, иначе у Гены было бы два поражения. Значит, Гена у Бори выиграл.

Путь к решению. Мы последовательно обращали внимание на *крайние* значения в таблице, которые давали нам максимум информации: 3 выигрыша Вали, затем 2 ничьих Ани. Чтобы определить результат последней игры Гена — Боря, мы устроили *перебор вариантов*, последовательно приводя невозможные варианты к *противоречию*.

Комментарий. Можно было воспользоваться и *арифметическими свойствами* таблицы Выигрышей-Ничьих-Поражений. Полезно обратить внимание на то, что: 1) сумма в каждой строке равна 3 (число игр одного участника); 2) сумма в столбце В равна сумме в столбце П (общее число выигрышей равно числу поражений); 3) сумма в столбце Н чётна, она равна удвоенному числу ничьих в турнире.

Задача 1.3. Ниже приведена таблица группового этапа одного из чемпионатов мира по футболу. Определите счёт во всех матчах.

	В	Н	П	М
Италия	1	2	0	1 : 0
Уругвай	1	1	1	2 : 1
Швеция	1	1	1	2 : 2
Израиль	0	2	1	1 : 3

Каждая команда сыграла с каждой один матч, В — число побед команды, Н — число ничьих, П — число поражений, М — количество забитых (слева) и пропущенных (справа) мячей.

Решение. Италия могла победить только со счётом 1 : 0, остальные матчи сыграла вничью 0 : 0. Израиль и Италия сыграли вничью со счётом 0 : 0 (иначе каждая из этих команд сделала обе свои ничьи с Уругваем и Швецией, и у Швеции две ничьи — противоречие). Вторая ничья Израйля 1 : 1 (если тоже 0 : 0, то Израиль проиграл со счётом 1 : 3, но никто не забил трёх голов). Значит, Израиль проиграл 0 : 2. Уругвай пропустил всего 1 гол, поэтому проиграл 0 : 1 и сделал ничью 0 : 0, значит, выиграл 2 : 0. Ни Италия, ни Уругвай не играли 1 : 1, поэтому ничью 1 : 1 Израиль сделал со Швецией. В остальных двух матчах Швеция забила всего 1 гол, значит, выиграла 1 : 0, поэтому и проиграла 0 : 1. Счёт 2 : 0 встретился всего один

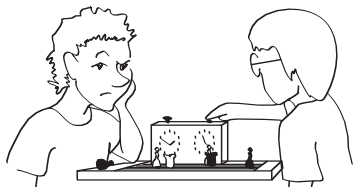
раз — в матче Уругвай–Израиль. Счёт 0 : 0, кроме матча Италия–Израиль, встретился ещё только в матче Италия–Уругвай. Значит, третий матч Италия выиграла у Швеции 1 : 0, и в матче Швеция–Уругвай счёт 1 : 0.

	Италия	Уругвай	Швеция	Израиль
Италия		0 : 0	1 : 0	0 : 0
Уругвай	0 : 0		0 : 1	2 : 0
Швеция	0 : 1	0 : 1		1 : 1
Израиль	0 : 0	0 : 2	1 : 1	

Путь к решению. Узким местом является малое число забитых и пропущенных голов, а также большое число ничьих. Важную роль здесь играет *двойственность* (частный случай *соответствия*): каждый забитый гол одновременно является и пропущенным, а каждый счёт в таблице *встречается дважды* — в прямом и в обратном порядке.

В следующих задачах надо считать набранные очки. Результат команды или игрока в турнире определяется по сумме очков, набранных в отдельных встречах. Решение и обсуждение следующей задачи поможет разобраться с подсчётом суммы очков турниров и их частей.

Задача 1.4. а) В однокруговом шахматном турнире с семью участниками все партии закончились вничью. Сколько всего очков набрали участники? А сколько всего партий было сыграно?



б) В незаконченном шахматном турнире сыграно пока только 15 партий. Сколько всего очков успели набрать участники?

в) Закончился однокруговой шахматный турнир с 16 участниками. Чему равна сумма набранных очков?

Ответ: а) 28 очков и 28 партий; б) 15 очков; в) 240 очков.

Решение. а) Каждый участник набрал семь раз по $\frac{1}{2}$, то есть всего по 3,5 очка. Соответственно, 8 участников набрали $8 \cdot 3,5 = 28$ очков.

Число партий можно посчитать так: первый сыграл 7 партий, второй — 6 партий (не считая партии с первым), третий — 5 партий (не считая партий с первым и вторым), и т. д. Итого $7+6+5+4+3+2+1 = 28$. Совпадение с числом очков не случайно: действительно, ведь в каждой партии соперники получили по $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$ очку. Отсюда ясно, *как считать число партий в любом однокруговом турнире: надо число участников умножить на число партий одного человека и поделить пополам.*

б) При ничьей игроки в сумме получают одно очко. Но ведь и при выигрыше тоже. Раз так, общее число очков равно числу сыгранных партий, то есть 15.

в) Мы уже заметили, что сумма очков не зависит от результатов партий. Поэтому можно считать сумму очков для случая, когда все ничьи: $16 \cdot 15 \cdot \frac{1}{2} = 120$.

Задача 1.5. В однокруговом турнире четырёх команд с начислением очков по системе 2–1–0 команда А набрала 5 очков, Б — 2 очка, В — 1 очко. Какое место заняла команда Г?

Ответ: второе место.

Решение. Всего команды набрали $4 \cdot 3 \cdot 1 = 12$ очков, команда Г набрала $12 - 5 - 2 - 1 = 4$ очка и заняла второе место.

Обратите внимание, что здесь мы получили ответ, не восстанавливая результатов всех матчей. Более того, здесь нельзя восстановить достоверно результат *ни одного* матча!

Задачи для самостоятельного решения

Задача 1.6. Команда «Метеор» в третьем матче турнира забросила втрое больше шайб, чем в первом, а во втором и четвёртом матчах — в сумме на 8 шайб меньше, чем в первом и третьем вместе взятых. Известно, что в этих четырёх матчах «Метеор» забросил не более 11 шайб. Какое наибольшее число из этих матчей он мог выиграть?

Задача 1.7. В однокруговом турнире участвовали шахматисты А, Б, В, Г и Д. При равенстве очков место определялось по дополнительным показателям. Известно, что Б занял второе место и набрал больше очков, чем В, Г и Д вместе. Каков результат партии между А и Б?

Задача 1.8. В однокруговом футбольном турнире команд А, Б, В, Г команда А заняла первое место, а команда Б набрала 3 очка и заняла «чистое» второе место (то есть команда выше неё набрала больше очков, а каждая команда ниже неё — меньше очков). Восстановите результаты всех матчей.

Задача 1.9. В футбольном турнире пяти команд победитель набрал столько очков, сколько все остальные вместе взятые. Сколько ничьих было в этом турнире?

Задача 1.10. В однокруговом шахматном турнире у каждого из игроков чего-то было столько, сколько у остальных вместе: у Оси — очков, у Нины — ничьих (в одной был пат), у Проши — проигрышей, а у Зины — зевков ферзя. Восстановите результаты всех партий.



Задача 1.11. В однокруговом шахматном турнире участвовали 8 человек и все они набрали разное количество очков. Шахматист, занявший второе место, набрал столько же очков, сколько четыре последних вместе. Как сыграли между собой шахматисты, занявшие третье и седьмое места?

Ответы и решения

1.6. Ответ: 2 матча.

Решение. В первом и третьем матче «Метеор» забросил в сумме не более 11 шайб. Но эта сумма в 4 раза больше числа шайб, заброшенных в первом матче, значит, она

делится на 4. Поэтому сумма не больше 8. Но её можно уменьшить на 8, значит, она и не меньше 8. Итак, сумма равна 8. Но тогда во втором и четвёртом матчах «Метеор» забросил 0 шайб, значит, он эти матчи не выиграл. А первый и третий он мог выиграть, например, со счётом 2 : 0 и 6 : 0 соответственно.

Запомните приём: неравенство для целых чисел можно *усилить*, используя *делимость*.

1.7. Ответ: ничья.

Решение. Троица В, Г и Д сыграла внутри себя 3 партии, в каждой разыгрывалось одно очко, поэтому в сумме они набрали не менее трёх очков. Значит, у Б не менее 3,5 очков. Пять шахматистов сыграли между собой десять партий, поэтому в сумме набрали десять очков. Тогда А набрал не больше чем $10 - 3 - 3,5 = 3,5$ очка. Но и не меньше, так как у А очков не меньше, чем у Б. Значит, у А ровно 3,5 очка. Но тогда у Б не больше 3,5 очков, то есть и у Б ровно 3,5 очка. Поэтому у В, Г и Д вместе — 3 очка. Значит, все встречи с А и Б эта троица проиграла. Во встречах с ней А и Б набрали по 3 очка, значит, оставшиеся пол-очка они получили во встрече между собой, то есть сыграли вничью.

1.8. Ответ:

	А	Б	В	Г	Очки	Места
А		1	3	3	7	I
Б	1		1	1	3	II
В	0	1		1	2	III–IV
Г	0	1	1		2	III–IV

Решение. У команд В и Г не более чем по 2 очка, поэтому нет побед и между собой они сыграли вничью. Команда Б в обоих матчах против В и Г получала очки, значит, в каждом — меньше трёх очков, то есть оба матча сыграла вничью, заработав 2 очка. Тогда третье очко команда Б заработала ничьей с А. Команда В заработала 2 очка

в матчах против Б и Г, значит, В проиграла А. Аналогично, команда Г проиграла А.

Путь к решению. *Узким местом* является малое число очков команд Б, В, Г, особенно в сравнении с числом очков за победу.

Комментарий. В приведённом решении удалось полностью избежать перебора вариантов за счёт правильного порядка при выборе *узких мест*. Однако большинство школьников будут предлагать решения с применением *перебора* (например, рассмотрев два варианта получения трёх очков командой Б). Это нормально, правильные решения нужно засчитывать. Однако всегда полезно показать, как *в конкретных случаях перебор можно сократить за счет того или иного наблюдения*.

1.9. Ответ: 6 ничьих.

Решение. Победитель сыграл 4 матча, в каждом набрал не более трёх очков (причем ровно 3 только в случае победы), значит, всего у него *не более 12* очков. Остальные команды в каждом из шести матчей между собой набрали в сумме не менее двух очков (причем 2 только в случае ничьей), поэтому в сумме набрали *не менее 12* очков. Указанное в условии равенство достигается только при 12 очках, то есть когда победитель всё выиграл, а все 6 остальных встреч были ничейными.

1.10. Ответ: Ося всё выиграл, Проша проиграл Зине, а Нина с Прошей и Зиной сыграла вничью.

Решение. Ося набрал в трёх партиях не более трёх очков, а остальные игроки в трёх партиях между собой набрали не менее трёх очков. Значит, Ося набрал 3 очка и всё выиграл. Поэтому проигрышей не меньше трёх. У Нины есть ничья, значит, из шести партий проигрыш был не более чем в пяти. Сложив два одинаковых числа — Прошины и не Прошины проигрыши, — получим чётное число. Значит, проигрышей всего четыре, из них два у Проши и два — у других. Нина и Зина проиграли Осе, значит, остальные партии они не проиграли. Каждая ничья Нины считается и ещё кому-то, значит, в партиях без Нины ничьих нет. Поэтому Зина у Проши выиграла. Мы нашли

уже четыре проигрыша, значит, Нина с Прошей и Зиной сыграла вничью.

Замечание. Условие про число зевков ферзя несущественно и в решении не использовалось.

1.11. Ответ: победил игрок, занявший третье место.

Решение. Пусть первые три места заняли соответственно игроки А, Б и В. Четыре последних игрока сыграли между собой 6 игр и уже только в этих играх набрали шести очков. Это значит, что у Б не менее шести очков. У А их ещё больше — 6,5 или 7 (а больше за 7 игр не набрать). Если А имеет 6,5 очков, то у Б меньше, то есть ровно 6. А если А имеет 7 очков, то он у всех выиграл, в том числе и у Б, поэтому у Б тоже только 6 очков. Значит, и у последних четырёх игроков ровно 6 очков, то есть все очки они набрали в играх между собой, а остальным проиграли. В частности, игрок В выиграл у игрока на седьмом месте.

К задачам этого занятия можно добавить какие-либо из дополнительных задач Д1–Д9.

Раздаточный материал

Занятие 1. Восстанови результаты

Задача 1.1. Команда «Вымпел» во втором матче турнира забросила больше шайб, чем в первом, а в третьем матче — на 6 шайб меньше, чем в двух первых вместе взятых. Известно, что в этих трёх матчах «Вымпел» забросил 6 шайб. Мог ли «Вымпел» выиграть все 3 матча?

Задача 1.2. Аня, Боря, Валя и Гена сыграли однокруговой турнир в крестики-нолики и начали заносить результаты в турнирную таблицу (В — число выигрышей, Н — ничьих, П — поражений). Они успели заполнить только 4 клетки (см. рис.). Заполните все остальные клетки.

	Аня	Боря	Валя	Гена	В	Н	П
Аня						2	
Боря						1	
Валя					3		
Гена							1

Задача 1.3. Ниже приведена таблица группового этапа одного из чемпионатов мира по футболу. Определите счёт во всех матчах.

	В	Н	П	М
Италия	1	2	0	1 : 0
Уругвай	1	1	1	2 : 1
Швеция	1	1	1	2 : 2
Израиль	0	2	1	1 : 3

Каждая команда сыграла с каждой один матч, В — число побед команды, Н — число ничьих, П — число поражений, М — количество забитых (слева) и пропущенных (справа) мячей.

Задача 1.4. а) В однокруговом шахматном турнире с восемью участниками все партии закончились вничью. Сколько всего очков набрали участники? А сколько всего партий было сыграно?

б) В незаконченном шахматном турнире сыграно пока только 15 партий. Сколько всего очков успели набрать участники?

в) Закончился однокруговой шахматный турнир с 16 участниками. Чему равна сумма набранных очков?

Задача 1.5. В однокруговом турнире четырёх команд с начислением очков по системе 2–1–0 команда А набрала 5 очков, Б — 2 очка, В — 1 очко. Какое место заняла команда Г?

Задача 1.6. Команда «Метеор» в третьем матче турнира забросила втрое больше шайб, чем в первом, а во втором и четвёртом матчах —

в сумме на 8 шайб меньше, чем в первом и третьем вместе взятых. Известно, что в этих четырёх матчах «Метеор» забросил не более 11 шайб. Какое наибольшее число из этих матчей он мог выиграть?

Задача 1.7. В однокруговом турнире участвовали шахматисты А, Б, В, Г и Д. При равенстве очков место определялось по дополнительным показателям. Известно, что Б занял второе место и набрал больше очков, чем В, Г и Д вместе. Каков результат партии между А и Б?

Задача 1.8. В однокруговом футбольном турнире команд А, Б, В, Г команда А заняла первое место, а команда Б набрала 3 очка и заняла «чистое» второе место (то есть команда выше неё набрала больше очков, а каждая команда ниже неё — меньше очков). Восстановите результаты всех матчей.

Задача 1.9. В футбольном турнире пяти команд победитель набрал столько очков, сколько все остальные вместе взятые. Сколько ничьих было в этом турнире?

Задача 1.10. В однокруговом шахматном турнире у каждого из игроков чего-то было столько, сколько у остальных вместе: у Оси — очков, у Нины — ничьих (в одной был пат), у Проши — проигрышей, а у Зины — зевков ферзя. Восстановите результаты всех партий.

Задача 1.11. В однокруговом шахматном турнире участвовали 8 человек, и все они набрали разное количество очков. Шахматист, занявший второе место, набрал столько же очков, сколько четыре последних вместе. Как сыграли между собой шахматисты, занявшие третье и седьмое места?

Указатель задач по темам

Графы: 3.1, 5.1, 5.2, 5.10, 5.11, Д38, Д50, Д51, Д52.

Двусторонняя оценка: 1.1, 1.6, 1.7, 1.9, 1.11, 2.4, 4.7, 4.8, 6.4, Д1, Д2, Д6, Д7, Д13, Д19, Д22, Д28, Д29, Д41, Д43.

Делимость и остатки: 1.6, 2.6, 4.2, 6.5, Д7, Д23, Д25, Д42.

Индукция: 2.5, 3.3, 3.11, 5.1, 5.2, 5.10, 5.9, 5.11, 6.8, 6.9, Д26, Д48.

Как такое может быть?: 3.1, 3.8, 3.9, 6.3.

Оценка+пример: 1.6, 2.1, 3.4, 3.5, 3.9, 3.10, 3.11, 4.4, 4.9, 6.7, 6.9, Д14, Д20, Д24, Д28, Д29, Д31, Д32, Д36, Д42, Д44, Д45, Д46.

Подсчёт двумя способами: 1.5, 2.2б), 2.7, 3.3а), 3.8, 3.9, 4.6, 4.11, Д4, Д39, Д40, Д51.

Подсчёт по группам: 1.7, 3.1, 4.1, 4.4, 4.5, 4.7, 6.7, Д6, Д9, Д17, Д18, Д19, Д22, Д27, Д28, Д30, Д31, Д32, Д33, Д35, Д37, Д45, Д47, Д48, Д52.

Постепенное усложнение: 2.1б), 2.8, 2.9, 3.4, 3.8в), 3.10, 4.9, 6.3, Д10, Д11, Д32.

Принцип Дирихле: 2.3, 2.5, 5.3, 5.5, 6.2, Д41, Д44, Д47, Д50.

Принцип крайнего: 1.1, 1.2, 1.6, 1.9, 1.10, 1.11, 2.3, 2.4, 4.4, 3.11, 4.9, 4.10, 5.4, 5.11, 6.10, 6.11, Д2, Д6, Д17, Д20, Д21, Д28, Д33, Д44.

Принцип узких мест: 1.1, 1.3, 1.6, 1.8, 3.6, 5.7, 5.8, 6.7, Д2, Д3, Д5, Д6, Д8, Д9, Д14, Д16, Д34, Д36, Д41, Д48, Д50, Д51.

Соответствие: 1.3, 1.4, 2.9, 2.10а), 2.11, 3.1, 3.2, 3.5, 3.7, 4.2, 4.3, 5.4, 6.6.

Средние: 2.4, 4.4, 4.10, 4.11, Д12, Д18.

Футбольная система подсчёта очков: 1.8, 1.9, 2.16), 2.9в), 2.10б), 3.4б), 3.8, 3.10, Д13, Д14, Д15, Д17, Д20, Д28, Д29, Д30, Д31, Д32, Д42, Д43, Д44, Д45, Д46.

Чередование: 3.3б), 3.5, 6.4, 6.5, Д37, Д49.

Чётность: 1.2, 1.10, 2.2, 3.2, 3.3, 4.8, 4.9, 5.2, 5.3, 5.9, Д2, Д14, Д19, Д25, Д37.

Авторы задач

Большинство использованных в книге задач давно и заслуженно стали математическим фольклором или восходят к нему. Их обычно публикуют без указания авторов. Это, однако, не повод умалчивать об авторах, когда они известны. Проще всего узнать свои собственные задачи, тем более, что кое-какие из них были специально придуманы для этой книги. Других задач с известным автором не так много, но зато почти все — яркие. Спасибо этим авторам, а также тем неизвестным, кто сочинил фольклорные жемчужины!

А. Блинков: 1.8, 3.4б), 3.6, Д5, Д31

А. Грибалко: 3.5

Р. Женодаров: Д20

А. Заславский: 3.4, 3.8, 3.10, Д7, Д17, Д31, Д43, Д47б).

Ю. Лифшиц: 5.3

В. Произволов: 1.11

И. Сергеев: 5.4

С. Токарев: 3.5

Б. Френкин: 4.11, 5.5, 5.9, 6.1, 6.2, 6.10, Д21, Д25, Д35, Д39, Д40, Д41.

А. Храбров: Д20

А. Шаповалов: 1.6, 1.9, 1.10, 3.3а), 6.6б), 6.7, 6.9, 6.11, Д2, Д9, Д36, Д47.

Оглавление

Предисловие	3
Занятие 1. Восстанови результаты	7
Занятие 2. Простейшие факты о турнирах	16
Занятие 3. Примеры и контрпримеры	23
Занятие 4. Алгебра турниров	36
Занятие 5. Турниры, графы и комбинаторика	43
Занятие 6. Проигравший вылетает	51
Дополнительные задачи	58
Ответы, указания, решения к дополнительным задачам	68
Раздаточный материал	92
Указатель задач по темам	102
Авторы задач	103