А. Д. БЛИНКОВ

# КЛАССИЧЕСКИЕ СРЕДНИЕ В АРИФМЕТИКЕ И ГЕОМЕТРИИ

Школьные
Математические
Кружки

А. Д. Блинков

# Классические средние в арифметике и геометрии

Издательство МЦНМО
Москва, 2012

УДК 51(07)
ББК 22.1
Б69

**Блинков А. Д.**

Б69 Классические средние в арифметике и в геометрии. — М.: МЦНМО, 2012.— 168 с.: ил.

ISBN 978-5-94057-918-2

*Седьмая книжка серии «Школьные математические кружки»* посвящена классическим средним величинам, большинство из которых были известны ещё в древности, и применениям их свойств при решении арифметических, алгебраических и геометрических задач. Особое внимание уделено взаимосвязи различных средних величин и установлению межпредметных связей между некоторыми темами школьных курсов алгебры и геометрии. Книжка предназначена для занятий со школьниками 5–11 классов. В неё вошли разработки десяти занятий математического кружка с подробно разобранными примерами различной сложности, задачами для самостоятельного решения и методическими указаниями для учителя.

Приведён также большой список дополнительных задач различного уровня трудности. Для удобства использования заключительная часть книжки сделана в виде раздаточных материалов. Книжка адресована школьным учителям математики и руководителям математических кружков. Надеемся, что она будет интересна школьникам и их родителям, студентам педагогических вузов, а также всем любителям элементарной математики.

*Александр Давидович Блинков*

Классические средние в арифметике и в геометрии

Серия «ШКОЛЬНЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ КРУЖКИ»

Технический редактор *Е. Горская* Иллюстрации *А. Неледва*

Лицензия ИД № 01335 от 24.03.2000 г. Подписано в печать 1.12.2011 г.
Формат 60 × 88 1/16. Бумага офсетная. Печать офсетная. Объем 10 1/2 печ. л.
Тираж 3000 экз.

Издательство Московского центра непрерывного математического образования
119002, Москва, Большой Власьевский пер., 11. Тел. (499)-241-74-83.

Отпечатано с готовых диапозитивов в ООО «Принт Сервис Групп»
105187, Москва, Борисовская ул., д. 14.

**ISBN 978-5-94057-918-2** 

# Предисловие

Предлагаемая книжка содержит достаточно небольшой вводный текст, содержащий основные определения и объясняющий происхождение классических средних, а также десять тематических занятий математического кружка, разбитых на два раздела. В материалы каждого занятия входят: вступительный и поясняющий текст учителя, включающий в себя несколько подробно разобранных типовых задач по данной теме; задачи, которые могут быть предложены учащимся для самостоятельного решения (как на занятии, так и дома); подробные решения этих задач; методические комментарии для учителя. В разделе приложений представлен обширный список дополнительных задач различного уровня трудности, часть из которых в какой-то степени дублирует задачи, предложенные для занятий, а часть — дополняет их новыми идеями (наиболее сложные задачи отмечены знаком *). Эти задачи можно использовать на усмотрение преподавателя (или обучающегося). Для них приведены, как правило, подробные решения (в наиболее простых случаях — ответы и указания).

Для удобства в конце каждого занятия приведён список задач из этого раздела, которые имеет смысл использовать для закрепления материала, контроля его освоения и углубления. Следует учесть, что есть задачи, которые отнесены к нескольким занятиям (поскольку допускают различные подходы). Кроме того, для удобства преподавателей в разделе приложений помещён раздаточный материал. В конце книги приведён список литературы, на которую иногда делаются ссылки в тексте. Большую часть этих изданий и публикаций можно использовать в качестве дополнительной литературы.

Занятия 1–3 первого раздела ориентированы на учащихся 5–7 классов, а занятие 4 — на учащихся 8–9 классов. Проведение этих занятий может помочь школьникам освоиться с различными приложениями среднего арифметического нескольких чисел, узнать и научиться применять его различные свойства, познакомиться с понятием взвешенного среднего арифметического, а также установить логические связи между основными величинами в задачах на движение и их аналогами в других текстовых задачах. Это должно повысить вычислительную, алгебраическую и логическую культуру учащихся и расширить возможности решения ими текстовых задач за счёт применения рациональных и эффективных методов, опирающихся на взаимосвязь средних величин.

Занятия 5–9 второго раздела ориентированы на учащихся 8–10 классов, а занятие 10 — на учащихся 10–11 классов. Проведение этих занятий может помочь школьникам познакомиться с типичными геометрическими конфигурациями, в которых возникают классические средние величины, изучить различные геометрические способы доказательства неравенств о средних для двух положительных чисел, познакомиться с особыми видами треугольников, связанных со средними величинами. Это позволит повторить многие разделы школьного курса геометрии, развить уже имеющиеся навыки решения геометрических задач, расширить арсенал методов их решения (в том числе за счёт эффективного применения векторов) и познакомиться с рядом интересных геометрических фактов, выходящих за пределы стандартной школьной программы.

Естественно, преподаватель математического кружка может по своему усмотрению использовать только часть предложенных занятий, поменять порядок их изучения, и т. д. При этом имеет смысл учитывать, что материалы занятий 1–5, 7 и 10 достаточно близки к общеобразовательной программе, а занятия 6, 8 и 9 ориентированы на более глубокое «погружение» в геометрический материал.

Предлагаемые в книге разработки занятий различаются и с методической точки зрения, что обусловлено как спецификой их содержания, так и возрастными особенностями школьников. Предполагается, что при проведении занятий первого раздела задачи 1–6 (в занятии 4 — задачи 1–5) вступительной части предлагаются учащимся последовательно, по одной, и, после того как какая-то часть школьников решит задачу, проводится общее обсуждение решения и делаются какие-то обобщения. При проведении занятий второго раздела материал вступительной части занятия обсуждается со школьниками, в основном, фронтально.

Автор благодарен своей ученице Е. Харитоновой (выпуск 2005 года) за коллекцию геометрических задач, представленных в её экзаменационном проекте, И. А. Кушниру, из книг которого взято много интересных задач, Ю. А. Блинкову и А. И. Сгибневу — за полезные обсуждения, Е. С. Горской — за выполнение прекрасных чертежей.

Отдельная и огромная благодарность Александру Васильевичу Шаповалову: за подборки задач, за внимательное прочтение книжки, за подробные комментарии, способствовавшие существенному улучшению её текста, и за написание содержательного послесловия.

# Из истории

***Классическими средними*** значениями для двух положительных чисел $a$ и $b$ принято считать:

1) $m = \frac{a+b}{2}$ — *среднее арифметическое*;

2) $g = \sqrt{ab}$ (то есть $g^2 = ab$, $g > 0$) — *среднее геометрическое*;

3) $h = \frac{2ab}{a+b}$ — *среднее гармоническое*;

4) $d = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$ — *среднее квадратичное*.

В одном из древнегреческих текстов, который приписывают древнегреческому математику Архиту (примерно 428–365 гг. до нашей эры), среднее арифметическое $m$, среднее геометрическое $g$ и среднее гармоническое $h$ определялись как равные члены арифметической, геометрической и гармонической «пропорций» соответственно:

1) $a - m = m - b$;

2) $a : g = g : b$;

3) $(a - h) : a = (h - b) : b$.

В первых двух случаях равносильность данных определений очевидна, в третьем случае её несложно проверить:

$$\frac{a-h}{a} = \frac{h-b}{b} \Leftrightarrow (a-h)b = (h-b)a \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow ha + hb = 2ab \Leftrightarrow h = \frac{2ab}{a+b}.$$

Первые два соотношения достаточно естественны, поэтому остановимся на том, как появилось третье. По преданию, среднее гармоническое ввёл Пифагор (VI век до н. э.), выразив с его помощью отношение основных музыкальных интервалов. Пифагор установил, что вместе со струной длиной $12L$, созвучно сливаясь с ней, звучат струны того же натяжения с длинами $6L$ (выше на октаву), $8L$ (выше на квинту) и $9L$ (выше на кварту). Число 9 есть среднее арифметическое чисел 6 и 12, а число 8 Пифагор определил как среднее гармоническое этих же чисел. Действительно, $\frac{12-8}{12} = \frac{8-6}{6}$.

Это созвучие (и определяющее его отношение чисел 6, 8, 9 и 12) называлось тетрадой. Пифагорейцы считали, что тетрада — это гамма, по которой поют сирены.

Немного позднее, когда математики заинтересовались бесконечными рядами чисел, были выделены ряды чисел, в которых каждый член начиная со второго был равен одной из средних величин двух соседних членов.

В случае, если это среднее было арифметическим, такие ряды стали называть арифметическими прогрессиями. Например, натуральный ряд чисел: 1; 2; 3; 4; ...

В случае, если это среднее было геометрическим, такие ряды стали называть геометрическими прогрессиями. В частности, ряд степеней двоек (с которым связана популярная легенда о происхождении шахмат): 1; 2; 4; 8; ...

Появился и ряд, который назвали гармоническим:

$$1;\ \frac{1}{2};\ \frac{1}{3};\ \frac{1}{4};\ \frac{1}{5};\ \ldots$$

При взгляде на гармонический ряд хорошо видно. что определение *среднего гармонического* $h$ двух чисел $a$ и $b$ можно было дать и по-другому:

$$\frac{1}{h} = \frac{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}{2}.$$

Несложно убедиться в том, что оно равносильно всем предыдущим, однако в этом определении виден «арифметический смысл» среднего гармонического: число, обратное среднему гармоническому чисел $a$ и $b$, является средним арифметическим чисел, обратных к числам $a$ и $b$.

Отметим также, что *среднее геометрическое* двух чисел иногда называют иначе: *средним пропорциональным*, так как пропорция, из которой оно получается, является «классической».

И наконец, *среднее квадратичное* чисел $a$ и $b$ было введено несколько позже и также стало классическим. Оно возникает из соотношения:

$$a^2 - d^2 = d^2 - b^2 \quad \Rightarrow \quad d = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}$$

(отметим, что в случае положительных чисел можно поставить знак равносильности). Отсюда опять же понятен его «арифметический смысл»: квадрат среднего квадратичного чисел $a$ и $b$ является средним арифметическим их квадратов.

В древнегреческой математике, которая была преимущественно геометрической, было известно несколько способов построения классических средних по двум данным отрезкам с длинами $a$ и $b$. В частности, одно из первых описаний построения первых трёх средних на одном чертеже (см. задачу 5.1 данной брошюры) дано в трактате Паппа Александрийского (III век н. э.), который включал в себя труды Эратосфена (276–194 гг. до н. э.), Никомеда (II век до н. э.) и Герона (I век н. э.). Построения классических средних на одном чертеже позволяют найти геометрические способы доказательства неравенства о средних:

$$h \leqslant g \leqslant m \leqslant d.$$

Отметим, что каждое из *классических средних* обобщается для $n$ чисел:

1) $m = \dfrac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}$ — *среднее арифметическое*;

2) $g = \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n}$ — *среднее геометрическое*;

3) $h = \dfrac{n}{\dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2} + \ldots + \dfrac{1}{x_n}}$ — *среднее гармоническое*;

4) $d = \sqrt{\dfrac{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}{n}}$ — *среднее квадратичное* (у него есть ещё одно обобщение: $d' = \sqrt[k]{\dfrac{x_1^k + x_2^k + \ldots + x_n^k}{n}}$ — *среднее степенное*).

Отметим также, что классические средние для $n$ положительных чисел также связаны неравенствами $h \leqslant g \leqslant \leqslant m \leqslant d$, но рассмотрение этих неравенств в обобщённом виде выходит за пределы данной брошюры (*этот материал будет подробно рассмотрен в книжке «Неравенства» нашей серии*). Более того, для всех классических средних, кроме среднего арифметического, мы во многих случаях ограничимся набором из двух чисел.

Для каждой из *классических средних* величин существуют обобщения, называемые *средними взвешенными*, которые первоначально появились в математике из рассмотрения некоторых физических процессов, а сейчас нашли широкое применение в математической статистике и экономике. Нам потребуется только одна из этих средних величин — *взвешенное среднее арифметическое*. Для чисел $x_1$, $x_2$, ..., $x_n$ с «весами» $m_1$, $m_2$, ..., $m_n$ его можно определить следующим образом:

$$x = \frac{x_1 m_1 + x_2 m_2 + \ldots + x_n m_n}{m_1 + m_2 + \ldots + m_n}.$$

Такое название объясняется простой механической моделью: если $x_1$, $x_2$, ..., $x_n$ — координаты $n$ материальных точек, а $m_1$, $m_2$, ..., $m_n$ соответственно — их массы, то *взвешенное среднее арифметическое* — это координата центра масс этой системы точек (см. занятие 10).

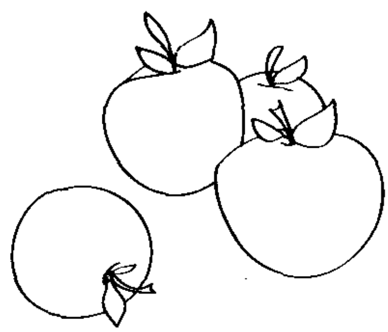
# Занятие 1

## Вычисление среднего арифметического и взвешенного среднего арифметического

Разбор и самостоятельное решение задач этого занятия помогут школьникам освоиться с различными приложениями среднего арифметического нескольких чисел, познакомиться с понятием взвешенного среднего арифметического и глубже разобраться с понятиями среднего роста, средней цены и средней скорости движения.

**Задача 1.1.** Сто яблок вместе весят 5 кг. Сколько весит «в среднем» одно яблоко? Сколько примерно весят 17 яблок?

**Решение.** Одно яблоко «в среднем» весит $5000 : 100 = 50$ (г), а 17 яблок — примерно $50 \cdot 17 = 350$ (г).



Полезно обратить внимание школьников на то, что, вычисляя средний вес одного яблока, мы делим их суммарный вес на количество яблок, то есть находим среднее арифметическое их весов.

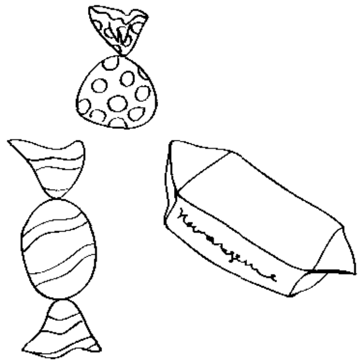
**Задача 1.2.** В классе 10 девочек и 20 мальчиков. Средний рост девочки — 140 см, средний рост мальчика — 149 см. Найдите средний рост ученика в классе.

**Решение.** Найдем суммарный рост всех учеников класса и разделим его на количество учеников. Получим

$$(140 \cdot 10 + 149 \cdot 20) : (10 + 20) = 146 \text{ (см)}.$$

Полезно обсудить со школьниками то, почему полученный ответ не равен среднему арифметическому чисел 140 и 149. Имеет смысл ещё раз подчеркнуть, что ***среднее арифметическое — относительная величина***, которая получается делением суммы на количество. В задачах на вычисление среднего арифметического эти суммарные величины всегда присутствуют (иногда незримо), поэтому, производя вычисления, «безопасно» складывать и вычитать можно только их. На первом этапе работы надо всегда быть готовым перейти (за счёт умножения) от средних величин к суммарным.

**Задача 1.3.** В магазин привезли три сорта конфет с разной ценой: 4 кг по цене 40 рублей за килограмм, 3 кг по цене 60 рублей за килограмм и 1 кг по цене 120 рублей за килограмм. По какой цене надо продавать смесь этих конфет?



**Решение.** Стоимость всех привезённых конфет равна $40 \cdot 4 + 60 \cdot 3 + 120 \cdot 1 = 460$ (руб.), а всего привезено 8 кг конфет. Значит, цена смеси («средняя стоимость килограмма») равна $460 : 8 = 57{,}5$ (руб.).

Имеет смысл обобщить полученный результат. Если привезено $n$ сортов конфет с массами $m_1$, $m_2$, ..., $m_n$ и ценами $c_1$, $c_2$, ..., $c_n$ соответственно, то цена 1 кг смеси может быть найдена по формуле

$$c = \frac{c_1 m_1 + c_2 m_2 + \ldots + c_n m_n}{m_1 + m_2 + \ldots + m_n},$$

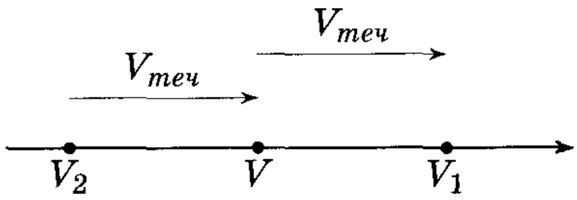
то есть является взвешенным средним арифметическим чисел $c_1$, $c_2$, ..., $c_n$. Полезно также обсудить с учащимися, что аналогичную формулу они практически применяли в задаче 1.2.

**Задача 1.4.** Скорость моторной лодки по течению реки равна 21 км/ч, а против течения — 15 км/ч. Найдите её скорость в стоячей воде. Проанализируйте полученный результат.

**Решение.** Пусть искомая скорость — $V$ км/ч, тогда скорость течения реки можно выразить двумя способами: $21 - V$ (км/ч) и $V - 15$ (км/ч). Приравнивая полученные выражения, получим $21 - V = V - 15$; $2V = 21 + 15$; $V = 18$ (км/ч).

Мы получили, что $V = \frac{21 + 15}{2}$, то есть скорость лодки в стоячей воде равна среднему арифметическому её скоростей по течению и против течения.

Полезно сделать рисунок и записать полученный результат в общем виде, обозначив через $V_1$ и $V_2$ скорости лодки по течению и против течения: $V = \dfrac{V_1 + V_2}{2}$.




**Задача 1.5.** Скорость моторной лодки по течению реки равна 21 км/ч, а против течения — 15 км/ч. Она проплыла некоторое время по течению реки и такое же время против течения.

а) Верно ли, что средняя скорость её движения равна среднему арифметическому её скоростей по течению и против течения?

б) Изменится ли ответ, если время движения по течению и против течения будет различным?

**Решение.** а) Пусть лодка двигалась $t$ часов по течению реки и столько же против течения, то есть общее время её движения равно $2t$ часов. Тогда весь путь, пройденный лодкой, равен $21t + 15t = 36t$ (км). Средняя скорость движения лодки равна $36t : 2t = 18$ (км/ч), что и составляет среднее арифметическое скоростей лодки по течению и против течения.

В случае, если школьники испытывают «технические» затруднения, можно сначала задать в условии конкретное время. Для подготовленных школьников, наоборот, можно сразу проводить аналогичные рассуждения в общем виде:

$$V_{ср.} = \frac{V_1 t + V_2 t}{2t} = \frac{(V_1 + V_2)t}{2t} = \frac{V_1 + V_2}{2}.$$

б) Ответ изменится. Достаточно рассмотреть числовой пример. Пусть, например, лодка двигалась один час по течению и два часа против течения, тогда

$$V_{ср.} = (21 \cdot 1 + 15 \cdot 2) : (1 + 2) = 17 \text{ (км/ч)}.$$

Следует ещё раз подчеркнуть, что средняя скорость движения — это отношение всего пройденного пути ко времени, затраченному на этот путь.

Полезно также обратить внимание учащихся на то, что в данной задаче не играет никакой роли, что движение осуществлялось по реке. Те же результаты можно получить при любом виде движения, когда несколько участков пути проходятся с разными скоростями, а время, затрачиваемое на прохождение этих участков, а) одинаковое; б) различное. Здесь же полезно обсудить, в каких случаях средняя величина равна среднему арифметическому частей, а в каких случаях это не так.

После этого имеет смысл обратить внимание школьников на то, что формула для вычисления средней скорости движения аналогична формуле для вычисления средней цены:

$$V_{\text{ср.}} = \frac{V_1 t_1 + V_2 t_2 + \ldots + V_k t_k}{t_1 + t_2 + \ldots + t_k},$$

где $V_1$, $V_2$, ..., $V_k$ — скорости на различных участках пути, а $t_1$, $t_2$, ..., $t_k$ — время их прохождения. Таким образом, средняя скорость — не среднее арифметическое скоростей, а их взвешенное среднее арифметическое!

**Задача 1.6.** Из двух сплавов, содержащих 10% и 50% меди соответственно, требуется получить новый сплав.

В каком отношении (по массе) требуется взять исходные сплавы, чтобы получить сплав, содержащий а) 30%; б) 40% меди? Проанализируйте полученный результат.

**Решение.** Пусть для нового сплава взято $x$ кг первого сплава и $y$ кг второго сплава, тогда в новом сплаве будет $0{,}1x + 0{,}5y$ (кг) меди. Следовательно, процентное содержание меди в новом сплаве составляет

$$p = \frac{0{,}1x + 0{,}5y}{x + y} \cdot 100\% = \frac{10x + 50y}{x + y}\ (\%).$$

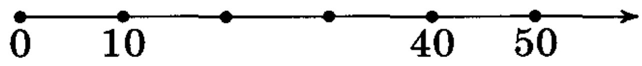
а) Если $p = 30$, то $10x + 50y = 30x + 30y$, то есть $x = y$. Значит, исходные сплавы надо взять в отношении $1 : 1$.

б) Если $p = 40$, то $10x + 50y = 40x + 40y$, то есть $y = 3x$. Значит, исходные сплавы надо взять в отношении $1 : 3$.

Проанализируем полученные результаты:

а) число 30 является средним арифметическим чисел 10 и 50, поэтому интуитивно понятно, что массы исходных сплавов должны быть одинаковы;

б) расположим заданные числа на числовом луче (см. рисунок). Число 40 находится на отрезке [10; 50] и делит его в отношении 3 : 1, считая от 10. А массы исходных сплавов надо взять в обратном отношении, то есть 1 : 3. В этом случае число 40 будет взвешенным средним арифметическим чисел 10 и 50!




Действительно, если массы исходных сплавов равны $m_1$ и $m_2$, а процентное содержание в них меди равно $p_1\%$ и $p_2\%$ соответственно, то $p = \dfrac{p_1m_1 + p_2m_2}{m_1 + m_2}$ является взвешенным средним арифметическим чисел $p_1$ и $p_2$. В нашем случае: $p = \dfrac{10 \cdot 1 + 50 \cdot 3}{4} = 40$.

Полезно также провести аналогию с вычислением среднего роста, средней цены и средней скорости движения. С подготовленными учащимися, используя тот же рисунок, можно также обсудить формулу для вычисления координаты точки, делящей отрезок $AB$, где $A(x_1)$, $B(x_2)$, в отношении $m : n$, считая от точки $A$: $x = \dfrac{nx_1 + mx_2}{m + n}$.

## Задачи для самостоятельного решения

**Задача 1.7.** Смешали четыре раствора, содержание соли в которых составляло 10%, 20%, 30% и 40%. При этом в одну ёмкость было слито 10 г первого раствора, 20 г второго, 30 г третьего и 40 г четвёртого. Каково процентное содержание соли в полученном растворе?

**Задача 1.8.** Каждый из десяти судей оценил выступление фигуриста, и средняя оценка оказалась равна 4,2 балла. Согласно правилам, были отброшены самая большая из поставленных оценок — 6 баллов и самая маленькая — 2 балла, после чего опять подсчитали средний балл. Чему он равен? (*Средний балл — среднее арифметическое баллов.*)

**Задача 1.9.** Когда в комнату вошел четвёртый человек, средний возраст находящихся в ней людей увеличился с 11 до 14 лет. Сколько лет вошедшему?

**Задача 1.10.** Профессор Тестер проводит серию тестов, на основании которых он выставляет испытуемому средний балл. Закончив отвечать, Джон понял, что если бы он получил за последний тест 97 баллов, то его средний балл составил бы 90, а если бы он получил за последний тест всего 73 балла, то его средний балл составил бы 87. Сколько тестов в серии профессора Тестера?

**Задача 1.11.** Желая найти среднюю годовую оценку по математике у всех шестиклассников, завуч попросил учителей математики четырёх шестых классов вычислить средние оценки в каждом из классов и затем нашёл среднее арифметическое этих четырёх чисел. Правильно ли сделал завуч?

**Задача 1.12.** От дома до школы Петя обычно едет на велосипеде со средней скоростью 300 м/мин. Сегодня, выехав в то же самое время, он часть пути проехал со скоростью 240 м/мин, а затем увеличил скорость до 420 м/мин и приехал вовремя. Какую часть от времени, затраченного на дорогу, Петя ехал с одной скоростью, а какую часть — с другой?

## Ответы и решения

**Задача 1.7. Ответ:** 30%.

Искомая величина равна суммарной массе всей соли, делённой на массу полученного раствора и умноженной на 100%:

$$\frac{10 \cdot 0,1 + 20 \cdot 0,2 + 30 \cdot 0,3 + 40 \cdot 0,4}{10 + 20 + 30 + 40} \cdot 100\% = 30\%$$

(то есть *взвешенное среднее арифметическое* 10%, 20%, 30% *и* 40%).

**Задача 1.8. Ответ:** 4,25.

Первоначальная сумма баллов равна $4{,}2 \cdot 10 = 42$. После отбрасывания двух оценок сумма баллов стала $42 - (6 + 2) = 34$. Итоговый средний балл равен $34 : 8 = 4{,}25$.

**Задача 1.9. Ответ:** 23 года.

Сначала сумма возрастов людей, находящихся в комнате, была равна $11 \cdot 3 = 33$ года, а затем эта сумма стала равна $14 \cdot 4 = 56$ лет. Значит, возраст вошедшего составляет $56 - 33 = 23$ года.

**Задача 1.10. Ответ:** 8 тестов.

Пусть количество тестов в серии равно $n$, тогда сумма баллов, набранных Джоном в первом случае, равна $90n$, а во втором случае эта сумма равна $87n$. Разница в сумме баллов возникает из-за результата последнего теста, поэтому $90n - 87n = 97 - 73$. Таким образом, $n = 8$.

**Задача 1.11. Ответ:** если количество учеников в классах различается, то завуч сделал неправильно.

Приведём числовой пример. Пусть в 6А классе учатся 20 учеников и их годовой средний балл равен 4,5, в 6Б — 25 учеников, а средний балл равен 4,2, в 6В — также 25 учеников, а средний балл — 3,8, в 6Г — 30 учеников и средний балл — 3,5. Тогда среднее арифметическое баллов, подсчитанное завучем, равно

$$(4{,}5 + 4{,}2 + 3{,}8 + 3{,}5) : 4 = 4.$$

Реальный средний балл равен сумме всех годовых оценок, делённой на их количество, то есть

$$\frac{4{,}5 \cdot 20 + 4{,}2 \cdot 25 + 3{,}8 \cdot 25 + 3{,}5 \cdot 30}{20 + 25 + 25 + 30} = 395 : 100 = 3{,}95.$$

Ошибка завуча: он вычислил среднее арифметическое, а надо было вычислить взвешенное среднее арифметическое (см. задачи 1.3 и 1.5).

**Задача 1.12. Ответ:** со скоростью 240 м/мин Петя ехал $\frac{2}{3}$ от всего времени, затраченного на дорогу, а со скоростью 420 м/мин — $\frac{1}{3}$.

*Первый способ.* Пусть сегодня Петя ехал $t_1$ минут со скоростью 240 м/мин и $t_2$ минут со скоростью 420 м/мин, тогда расстояние от дома до школы равно $240t_1 + 420t_2$ (м). Поскольку обычно он тратит на дорогу такое же время, это же расстояние равно $300(t_1 + t_2)$ (м). Приравнивая эти два выражения, получим $240t_1 + 420t_2 = 300(t_1 + t_2)$, то есть $t_1 = 2t_2$. Следовательно, со скоростью 240 м/мин Петя ехал $\frac{2}{3}$ всего времени, а со скоростью 420 м/мин — $\frac{1}{3}$ всего времени.

*Второй способ.* Поскольку средняя скорость Петиного движения равна 300 м/мин, число 300 является взвешенным средним арифметическим чисел 240 и 420 (см. задачу 1.5). Число 300 делит отрезок [240; 420] в отношении 1 : 2, считая от числа 240, значит, соотношение времени движения со скоростями 240 м/мин и 420 м/мин будет обратным, то есть 2 : 1 (сравните с задачей 1.6).

Можно также использовать задачи Д1–Д11.

# Раздаточный материал

## Занятие 1. Вычисление среднего арифметического и взвешенного среднего арифметического

**Задача 1.1.** Сто яблок вместе весят 5 кг. Сколько весит «в среднем» одно яблоко? Сколько примерно весят 17 яблок?

**Задача 1.2.** В классе 10 девочек и 20 мальчиков. Средний рост девочки — 140 см, средний рост мальчика — 149 см. Найдите средний рост ученика в классе.

**Задача 1.3.** В магазин привезли три сорта конфет с разной ценой: 4 кг по цене 40 рублей за килограмм, 3 кг по цене 60 рублей за килограмм и 1 кг по цене 120 рублей за килограмм. По какой цене надо продавать смесь этих конфет?

**Задача 1.4.** Скорость моторной лодки по течению реки равна 21 км/ч, а против течения — 15 км/ч. Найдите её скорость в стоячей воде. Проанализируйте полученный результат.

**Задача 1.5.** Скорость моторной лодки по течению реки равна 21 км/ч, а против течения — 15 км/ч. Она проплыла некоторое время по течению реки и такое же время против течения.

а) Верно ли, что средняя скорость её движения равна среднему арифметическому её скоростей по течению и против течения?

б) Изменится ли ответ, если время движения по течению и против течения будет различным?

**Задача 1.6.** Из двух сплавов, содержащих 10% и 50% меди соответственно, требуется получить новый сплав. В каком отношении (по массе) требуется взять исходные сплавы, чтобы получить сплав, содержащий а) 30%; б) 40% меди? Проанализируйте полученный результат.

**Задача 1.7.** Смешали четыре раствора, содержание соли в которых составляло 10%, 20%, 30% и 40%. При этом в одну ёмкость было слито 10 г первого раствора, 20 г второго, 30 г третьего и 40 г четвёртого. Каково процентное содержание соли в полученном растворе?

**Задача 1.8.** Каждый из десяти судей оценил выступление фигуриста, и средняя оценка оказалась равна 4,2 балла. Согласно правилам, были отброшены самая большая из поставленных оценок — 6 баллов и самая маленькая — 2 балла, после чего опять подсчитали средний балл. Чему он равен? (*Средний балл — среднее арифметическое баллов.*)

**Задача 1.9.** Когда в комнату вошел четвёртый человек, средний возраст находящихся в ней людей увеличился с 11 до 14 лет. Сколько лет вошедшему?

**Задача 1.10.** Профессор Тестер проводит серию тестов, на основании которых он выставляет испытуемому средний балл. Закончив отвечать, Джон понял, что если бы он получил за последний тест 97 баллов, то его средний балл составил бы 90, а если бы он получил за последний тест всего 73 балла, то его средний балл составил бы 87. Сколько тестов в серии профессора Тестера?

**Задача 1.11.** Желая найти среднюю годовую оценку по математике у всех шестиклассников, завуч попросил учителей математики четырёх шестых классов вычислить средние оценки в каждом из классов и затем нашёл среднее арифметическое этих четырёх чисел. Правильно ли сделал завуч?

**Задача 1.12.** От дома до школы Петя обычно едет на велосипеде со средней скоростью 300 м/мин. Сегодня, выехав в то же самое время, он часть пути проехал со скоростью 240 м/мин, а затем увеличил скорость до 420 м/мин и приехал вовремя. Какую часть от времени, затраченного на дорогу, Петя ехал с одной скоростью, а какую часть — с другой?

## Список литературы

1. А. Д. Александров, А. Л. Вернер, В. И. Рыжик. *Геометрия для 8–9 классов. Учебное пособие для учащихся школ и классов с углублённым изучением математики.* — М.: Просвещение, 1991.

2. А. Д. Александров, А. Л. Вернер, В. И. Рыжик. *Геометрия для* 10–11 *классов. Учебное пособие для учащихся школ и классов с углублённым изучением математики.* — М.: Просвещение, 1992.

3. М. Б. Балк, В. Г. Болтянский. *Геометрия масс.* — М.: Физматлит, 1987.

4. А. Д. Блинков. *«Сценарии уроков математики* (6–11 *классы)»*, *предметно-содержательный журнал «Современный урок»*, ОЦ «Педагогический поиск», 2007–2011.

5. Н. Я. Виленкин, А. С. Чесноков, С. И. Шварцбурд. *Математика. Учебник для* 6 *класса средней школы.* — СПб, Свет, 1996.

6. М. Л. Галицкий, А. М. Гольдман, Л. И. Звавич. *Сборник задач по алгебре для* 8–9 *классов. Учебное пособие для школ и классов с углублённым изучением математики.* — М.: Просвещение, 1992.

7. А. М. Гольдман, Л. И. Звавич. *Числовые средние и геометрия.* Научно-популярный физико-математический журнал «Квант», №9, 1990.

8. Р. К. Гордин. *Геометрия. Планиметрия. Задачник для* 7–9 *классов.* — М.: МЦНМО, 2004.

9. С. И. Зетель. *Новая геометрия треугольника.* — М.: Учпедгиз, 1963.

10. С. И. Зетель. *Свойства треугольника, стороны которого составляют арифметическую прогрессию.* «Математическое просвещение», №5, 1936.

11. Д. В. Клименченко. *Задачи по математике для любознательных.* — М.: Просвещение, 1992.

12. И. А. Кушнир. *Возвращение утраченной геометрии.* — К.: Факт, 2000.

13. И. А. Кушнир. *Геометрия на баррикадах.* — К.: Факт, 2009.

14. *Московские математические регаты* / Сост. А. Д. Блинков, Е. С. Горская, В. М. Гуровиц. — М.: МЦНМО, 2007.

15. В. В. Прасолов. *Задачи по планиметрии*: в 2 ч. — М.: Физматлит, 1995.

16. В. В. Прасолов, И. Ф. Шарыгин. *Задачи по стереометрии.* — М.: Физматлит, 1989.

17. А. П. Савин, В. А. Сендеров. *Описанная трапеция и средние.* Научно-популярный физико-математический журнал «Квант», №8, 1972.

18. З. М. Скопец. *Сравнение различных средних двух положительных чисел.* Научно-популярный физико-математический журнал «Квант», №2, 1971.

19. *Энциклопедический словарь юного математика.* / Сост. А. П. Савин. – М.: Педагогика, 1985.

20. А. Х. Шень. *Дюжина задач о среднем арифметическом.* Научно-популярный физико-математический журнал «Квант», №6, 2008.

**Список веб-ресурсов**

1. `http://problems.ru/` — база задач по математике.

2. `http://geometry.ru/olimp.htm` — сайт всероссийской олимпиады по геометрии имени И. Ф. Шарыгина.

3. `olympiads.mccme.ru/regata` — математические регаты.

# Оглавление

[redacted]

[redacted]

[redacted]



ISBN 978-5-94057-918-2
9 785940 579182 >