Математическая олимпиада им. Г.П.Кукина. Омск 2007–2010

Авторы: Адельшин А. В., Кукина Е.Г., Латыпов И.А., Усов С.В., Чернявская И.А., Шаповалов А.В., Штерн А.С.

Издательство: МЦНМО
ISBN: 978-5-4439-0303-3
Год издания: 2011
Тираж: 1500 экз.
Количество страниц: 80 стр.
Размер: 140x200/3

В книге содержатся задачи математической олимпиады школьников г. Омска им. Г.П. Кукина за 2007–2010 годы. Все задачи снабжены подробными решениями. Для удобства работы приведён тематический рубрикатор. Книга предназначена для школьников 5–11 классов, учителей математики и руководителей математических кружков.

Вступление

Математическая олимпиада школьников г. Омска имеет довольно солидную историю. Впервые, в своём нынешнем виде, она проводилась в 1992 году. Главным организатором олимпиады был заведующий кафедрой алгебры Омского государственного университета доктор физико-математических наук Георгий Петрович Кукин. Вклад этого человека в развитие математического образования Омской области трудно переоценить. Создатель физико-математического лицея и системы математических кружков для школьников 5-7 классов, автор статей и книг по методике преподавания элементарной математики, просто замечательный энтузиаст работы с одарёнными детьми, он сумел вовлечь в олимпиадное движение сотни детей и взрослых. Вплоть до своей безвременной кончины в 2003 году он возглавлял жюри и оргкомитет олимпиады. Уже с 2004 года математическая олимпиада омских школьников стала носить имя Г.П. Кукина. До 2008-2009 учебного года она имела статус II (муниципального) этапа Всероссийской математической олимпиады. После введения нового положения о Всероссийской олимпиаде школьников этот статус был утрачен, и организацией «кукинской» олимпиады стал заниматься Институт математики и информационных технологий Омского государственного университета им. Ф.М. Достоевского. Тогда же название «математическая олимпиада школьников г. Омска им. Г.П. Кукина» вошло в положение об олимпиаде и стало официальным. Надо сказать, что «выход» из системы Всероссийской олимпиады не сказался на популярности олимпиады. Число омских участников не стало меньше, а количество ребят из районов Омской области и соседних регионов даже увеличилось.

Как проходит олимпиада им. Г.П. Кукина? Олимпиада для учеников 7-11 классов имеет традиционную письменную форму. Единственная существенная особенность состоит в том, что олимпиадный вариант включает 6 задач при четырёхчасовой продолжительности работы. Вопрос «А не много ли задач?» встаёт перед членами методической комиссии регулярно, но сами участники олимпиады дают на него ответ «Нет, не много, и хорошо потому, что есть возможность выбора». О сложности варианта пусть судит читатель. Можем сказать только, что обычный результат победителя олимпиады – 5 решённых задач. Каждая задача почти всегда кем-то решается, но ситуация, когда один школьник решает все задачи, возникает довольно редко. Проверка проводится по правилам Всероссийской олимпиады по математике: каждая задача вне зависимости от её трудности оценивается в 7 баллов. При комплектовании вариантов мы стараемся избегать задач классической олимпиадной тематики (инварианты, вспомогательные раскраски и т.д.). Основа варианта – задачи логико-алгоритмического характера, для решения которых требуется развитая логическая культура и алгоритмические способности, но не владение специальными «олимпиадными» методами. Удачно дополняют варианты задачи повышенной сложности по разным разделам школьной алгебры и геометрии.

Олимпиада для учеников 5-6 класов проходит в начале февраля (традиционное время проведения олимпиады для старших – декабрь) и отличается особой формой проведения. Олимпиада для младших – устная. Нет нужды объяснять насколько эффективнее эта форма в соревнованиях учеников среднего возраста. Конечно, она предполагает наличие большого квалифицированного жюри, но эту проблему нам решать удаётся. Число студентов и преподавателей ОмГУ, желающих принять участие в проведении олимпиады, как правило, превосходит имеющиеся потребности. Мы придерживаемся формы проведения устной олимпиады, разработанной коллегами из Санкт-Петербурга. Каждый школьник получает 6 «довыводных» задач, а те, кому удаётся решить четыре из них, переходят в другую аудиторию, где получают четыре «выводные» задачи.

Не все задачи являются новыми, но методическая комиссия олимпиады старается избегать появления в вариантах широко известных задач. Для комплектования варианта могут быть использованы материалы различных региональных математических соревнований и иностранных олимпиад, но не задачи из книг, вышедших на русском языке массовыми тиражами. Около двух третей предлагаемых на олимпиаде задач – авторские. Список авторов задач приведён в конце книги. Там же читатель найдёт тематический рубрикатор, что, как мы надеемся, сделает более удобным использование предлагаемого материала.

Задачи

5 класс. 2007-2008 уч. год. Довывод

1. Полный бидон с молоком весит 20 кг, а бидон, наполненный молоком наполовину, весит 14 кг. Сколько будет весить бидон, если наполнить его молоком на треть?

2. На доске написано число 1. За один ход разрешается либо прибавить к числу сумму всех его цифр, либо переставить его цифры в любом порядке. (Например, из числа 3 можно за один ход получить только число 6, а из числа 13 либо число 17, либо число 31) За какое наименьшее количество ходов можно получить трехзначное число?

3. Тридцать три ореха разложены по кучкам, причём в каждой кучке больше одного ореха. После того, как из каждой кучки в первую положили по одному ореху, орехов во всех кучках стало поровну. Сколько имеется кучек, и сколько орехов было в каждой из них первоначально?

4. На острове живут рыцари, которые всегда говорят правду и лжецы, которые всегда обманывают. Три брата-островитянина (старший, средний и младший) получили в наследство кота, осла и мельницу. После этого каждый из братьев сделал два заявления: «Тот, кто получил мельницу, старше меня» и «Тот, кто получил кота, младше меня». Сколько среди братьев лжецов?

5. Расставьте на шахматной доске 16 ладей так, чтобы каждая била столько же других ладей, сколько и пустых клеток. Ладья бьёт все незанятые клетки горизонтали и вертикали, на которых стоит, но до первой стоящей на ее пути ладьи.

6. В каждую клетку квадрата 3×3 записано целое число. При этом сумма чисел в каждом столбце, кроме первого, в 4 раза больше, чем в предыдущем. Сумма чисел в каждой строке, кроме первой, на 1 больше, чем в предыдущей. А в одной из строк сумма чисел составляет 2008. Найдите сумму чисел в первом столбце.

Вывод

7. Имеются гири трёх типов: тяжёлые, средние и лёгкие. У всех тяжёлых гирь веса одинаковые, у всех средних одинаковые, и у всех лёгких тоже одинаковые. Известно, что одну из гирь можно уравновесить двумя другими, причём одну из этих двух тоже можно уравновесить двумя другими. Сколько лёгких гирь уравновешивают одну тяжёлую гирю (найдите все варианты ответа и докажите, что других нет)?

8. Представьте число 2008 в виде суммы пяти натуральных слагаемых так, чтобы все цифры в записи всех этих чисел были различны.

9. У Васи есть два кубика, на каждую грань которых он хочет написать одну из цифр от 0 до 9. Вася хочет так нарисовать цифры на гранях, чтобы получился «календарь»: приставляя кубики друг к другу, на верхних гранях можно было бы получить любую комбинацию от 01 до 31. Сможет ли он этого добиться?

10. В ребусе СНЕГ+ЛЫЖИ=ЛЫЖНЯ каждая из букв обозначает цифру от 0 до 9, причём разные буквы обозначают разные цифры, а одинаковые – одинаковые. Найдите как можно больше решений этого ребуса. Если Вы считаете, что нашли все решения, попытайтесь объяснить, почему нет других решений.

5 класс. 2008-2009 уч. год. Довывод

11. В доме 25 этажей, но сломался лифт: теперь он может за одну минуту либо подняться на 14 этажей, либо спуститься на 11 (например, с 10-го этажа можно

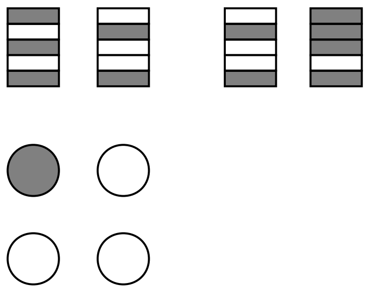
подняться на 24-й). Человек спускается на один этаж за 1 минуту. Что быстрее, спуститься с шестого этажа на первый пешком или добраться на лифте?

12. Найдите все решения числового ребуса АХ+УХ=УРА (разным буквам соответствуют разные цифры, а одинаковым – одинаковые).

13. Чтобы построить поросячий домик, Ниф-Нифу не хватало 300 кирпичей, Нуф-Нуфу не хватало 200 кирпичей, а Наф-Нафу не хватало всего 100 кирпичей. Когда они сложили все свои кирпичи вместе, оказалось, что они могут построить только один домик на троих и кирпичей больше не останется. Сколько кирпичей нужно для одного поросячьего домика?

14. Нарисуйте на плоскости 5 прямых так, чтобы они разбили ее на 13 частей.

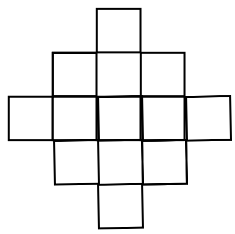
15. Из Простоквашино в Печкино на лыжах вышли Шарик и Матроскин. Шарик дошел до Печкино за 30 минут, развернулся, и через 5 минут на обратном пути встретил отстающего Матроскина. Сколько минут после этого Шарик должен идти по направлению к Простоквашино, чтобы, развернувшись обратно, он пршёл в Печкино одновременно с Матроскиным?



16. В пятом классе учатся три девочки: Ира, Галя и Наташа. Одна из них самая умная, и она всегда говорит правду. Другая самая красивая, и она всегда лжет. А третья девочка самая хитрая: она иногда лжет, а иногда говорит правду. Ира сказала: «Я красивее Гали». Галя сказала: «Я умнее Наташи». Наташа сказала: «Я хитрее Иры». Какая из девочек самая красивая?

Вывод

17. Фигура «летучая ладья» ходит так же, как и обычная ладья, но за один ход не может встать на соседнее поле. Сможет ли она обойти изображённую на рисунке справа фигуру так, чтобы побывать на каждой клетке ровно один раз?



18. Расставьте числа 1, 2, 3, … 10 в другом порядке, чтобы первым шло 10, а каждое следующее было делителем суммы всех предыдущих. (Первое число без остатка делится на второе, сумма первых двух – на третье, сумма первых трёх – четвёртое, и т.д.)

19. Вася записал трехзначное число без нулей, все цифры которого различны, а их сумма равна 8. Затем он поменял местами две цифры этого числа, умножил результат на 4, и получил число, меньшее исходного. Какое число придумал Вася первоначально?

20. Восемь чёрных и восемь белых шашек разложены в 4 столбика. Известно, как эти столбики выглядят спереди, справа (верхние два рисунка) и сверху. Найдите цвет нижней шашки в заднем левом столбике.

5 класс. 2009-2010 уч. год. Довывод

21. В магазин привезли крупу, сахар и соль. Полмешка соли весят на 5 кг больше, чем полмешка сахара. А два мешка сахара весят на 10 кг больше чем два мешка крупы. На сколько килограммов мешок соли тяжелее мешка крупы?

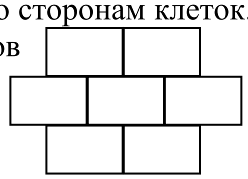
22. Разрежьте нарисованный на клетчатой бумаге квадрат 4х4 на 9 прямоугольников так, чтобы равные прямоугольники не соприкасались ни сторонами, ни вершинами. (Все разрезы должны идти по сторонам клеток)

23. Двум муравьям, Толстому и Тонкому, нужно перенести по 150 г груза из точки А (где они сейчас находятся) в точку В, расстояние между которыми равно 150 метров.

Толстый муравей ходит со скоростью 3 м/мин, но может унести 5 г груза, Тонкий – со скоростью 5 м/мин, но может унести лишь 3 г груза. Кто из них первым доставит все 150 г в точку В? Скорость муравья с грузом не отличается от скорости муравья без груза.

24. На острове живут рыцари орденов Алой и Белой розы. Рыцари ордена Алой розы никогда не говорят правду два раза подряд, а рыцари ордена Белой розы никогда не обманывают два раза подряд. Два островитянина сделали по 2 заявления. Первый: «Я – из ордена Алой розы» и «Мы оба из одного ордена». Второй: «Мы оба из одного ордена» и «Среди произнесённых нами утверждений лживых больше, чем правдивых». Кто из какого ордена?

25. На листе клетчатой бумаги со стороной клетки 1 см нарисован прямоугольник, стороны которого идут по сторонам клеток. Прямоугольник разрезали на четыре прямоугольника двумя прямолинейными разрезами, также идущими по сторонам клеток. Пятиклассник Петя нашёл, что у трёх из этих прямоугольников площади составляют 4 см^2, 8 см^2 и 16 см^2. Чему равна площадь исходного прямоугольника? Найдите все варианты ответа и докажите, что других быть не может.



26. На уроки танцев ходят 90 школьников, среди которых есть мальчики и девочки. Учитель разбил их на группы по 3 человека. В каждой из групп каждый школьник станцевал с каждым по разу, а школьники из разных групп между собой не танцевали. Оказалось, что было ровно 22 танца, в которых мальчик танцевал с мальчиком и ровно 38 танцев, в которых девочка танцевала с девочкой. Сколько было «смешанных» групп, в которые входили и мальчики, и девочки?

Вывод

27. Имеются три сосуда. В первом сосуде 39 литров воды, во втором 9 литров, в третьем 3 литра. Разрешается взять любые два сосуда и перелить из каждого в третий любой, но один и тот же объём воды. Как, действуя таким образом несколько раз, добиться того, чтобы воды во всех сосудах стало поровну?

28. Можно ли расставить на линейке длиной 15 см четыре метки, которые разделят линейку на отрезки длиной 1, 2, 3, 4, 5 так, чтобы с помощью этой линейки можно было измерить отрезок любой целой длины от 1 до 15 см? (Линейку к отрезку можно прикладывать только один раз)

29. Подземелье состоит из 7 квадратных комнат (см. рисунок), в каждой из которых либо сидит тигр, либо сидит принцесса, либо никого нет. Комнат с принцессами меньше, чем пустых. Кроме того, в любых трех комнатах, каждые две из которых имеют общую стенку, есть хотя бы один тигр и хотя бы одна принцесса. Сколько в подземелье принцесс, и в каких комнатах они сидят?

30. По краю круглого циферблата, начиная с отметки «12», побежали муха и две мошки, причем мошки – по направлению движения часовой стрелки, а муха – против. С первой мошкой муха впервые встретилась на отметке «4», а со второй – на отметке «2» (во время встреч все продолжают движение без остановок). На каких отметках циферблата они могут встречаться втроем одновременно?

6 класс. 2007-2008 уч. год. Довывод

31. К вычислительному устройству присоединены два монитора, на которых каждую секунду вместо имеющегося числа появляется новое. При этом на первом мониторе по очереди появляются числа 1, 5, 9, 13, …, а на втором – числа 1, 6, 11, 16, … Какие два числа будут написаны на мониторах в тот момент, когда их сумма станет равна 2000? (Единицы на мониторах появились одновременно)

32. Одновременно Ахиллес и черепаха начали двигаться навстречу друг другу. Гора Олимп находится ровно посередине между ними, но дорога от черепахи до Олимпа идёт по земле, а от Олимпа до Ахиллеса по асфальту. Известно, что Ахиллес движется по асфальту в 3 раза быстрее, чем черепаха по земле, а по земле они движутся с одинаковыми скоростями. Ахиллес добрался до Олимпа за час. Через какое время после этого он встретит черепаху, если продолжит движение, не останавливаясь?

33. Карлсон, Малыш, Винни Пух и Пятачок решили подкрепиться и отправились в гости к Кролику, у которого было в запасе 30 бочонков меда. Через некоторое время оказалось, что каждый из них съел целое количество бочонков, причем Малыш и Карлсон съели столько же, сколько Винни Пух и Пятачок, а Карлсон и Винни Пух – в 6 раз больше, чем Малыш и Пятачок. Какое количество бочонков съел каждый, если Пятачок съел меньше всех остальных?

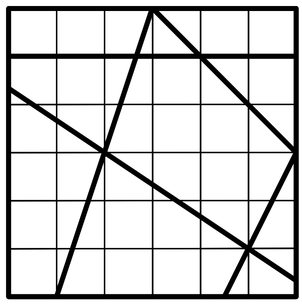
34. У Кощея есть три замка А, Б и С – все стоят на опушке леса, в котором в избушке Д живет Баба-Яга, все замки соединены друг с другом дорогами, и от каждого ведет дорога к домику Бабы-Яги. Если Кощей добирается до Яги по маршруту АБСД или БСАД, у него на это уходит 4 часа, а если по маршруту САБД, то 3 часа 50 минут. На обход всех трех своих замков по опушке леса (маршрут АБСА) у Кощея уходит 4,5 часа. Докажите, что из какого-то из своих замков Кощей сможет добраться до Бабы-Яги менее чем за час.

35. У попа больше земли, чем у Балды на 90 квадратных аршин. Каждый год поп и Балда одновременно обмениваются землёй: Поп отдаёт Балде третью часть своего надела, и Балда отдаёт попу третью часть своего надела. У кого из них будет больше земли через 5 лет и на сколько?

36. На доске написано число 1. За один ход разрешается либо умножить это число на 2, либо переставить его цифры в любом порядке. Как, действуя таким образом, получить число 2008?

Вывод

37. Представьте число 2008 в виде суммы пяти натуральных слагаемых так, чтобы все цифры в записи всех этих чисел были различны.



38. Квадратный торт разделен пятью надрезами на 10 кусков. Распределите эти куски между тремя сладкоежками так, чтобы торта всем досталось поровну.

39. У разбойника три монеты достоинством в 1, 1 и 2 динара: по монете в каждой руке и одна в кошельке. Разбойник поймал Али-Бабу и обещает отпустить его, если Али-Баба угадает, какая монета у него в левой руке. Али-Баба может задать всего один вопрос, причём разбойник ответит честно, если у него в правой руке 1 динар, и солжет, если там 2 динара. Помогите Али-Бабе придумать какой-нибудь вопрос, который позволит ему угадать монету в левой руке разбойника. Не забудьте объяснить, почему Вы считаете придуманный Вами вопрос подходящим.

40. На доске нарисован квадрат 3×3. Учительница Марья Ивановна написала в одной из клеток квадрата число и дала ученику Пете такое задание. Он должен поочерёдно вписывать по одному числу в любую пустую клетку, причём если все клетки, имеющие с ней общую сторону, пустые, то число, которое он пишет, должно быть больше всех, написанных к тому времени. А если хотя бы одна из соседних по стороне клеток заполнена, то число, которое он пишет, должно быть меньше всех, написанных к тому времени. В конце концов получилась следующая таблица. Какое число написала Марья Ивановна? (Найдите все варианты и докажите, что других быть не могло)

1	9	4
8	5	2
3	7	6

6 класс. 2008-2009 уч. год. Довывод

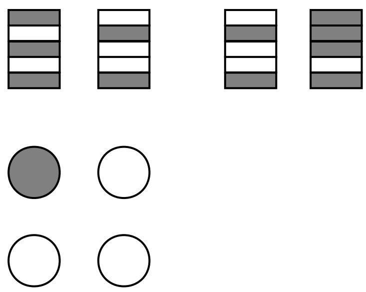
41. Решите ребус: АХ + УХ = УРА (одинаковым буквам соответствуют одинаковые цифры, а разным – разные).

42. Шахматный конь захромал, и, делая обычный ход буквой Г, наступает на каждую клетку, входящую в эту букву (например, делая ход с a1 на b3, он наступает еще и на клетки a2, a3, либо на b1, b2). Как коню двигаться по квадрату 4×4, чтобы наступить на каждую клетку ровно один раз? Нарисуйте хотя бы один такой маршрут.

43. На столе стоят гирьки двух весов: тяжёлые и лёгкие. Все тяжёлые гирьки весят одинаково, и все лёгкие гирьки весят одинаково. Некоторые гирьки расставили по двум чашкам чашечных весов так, что весы оказались в равновесии. Если переставить две лёгкие гирьки с левой чашки на правую, то для того, чтобы сохранилось равновесие, придётся поставить на левую чашку со стола одну тяжёлую гирьку. Сколько лёгких гирек пришлось бы поставить со стола на левую чашку, если бы первоначально с неё на правую чашку переставили одну тяжёлую гирьку?

44. В городе живут рыцари и лжецы, рыцари говорят всегда только правду, а лжецы всегда лгут. Однажды в автобусе ехало несколько человек. «Сейчас остановка А. Следующая остановка – Б», – произнес 1-й пассажир. «Сейчас остановка Б», – сказал 2-й, – «Предыдущая была В». «Предыдущая была В», - вступил в спор 3-й пассажир, - «А сейчас остановка А!». Определите, сколько из этих троих пассажиров рыцарей.

45. Буратино записал трехзначное число без нулей, все цифры которого различны. Затем он написал все числа (включая исходное), которые получаются из этого числа перестановкой цифр. Кот Базилио эти числа не видел, но пронюхал, что сумма цифр первого числа равна 15. Помогите Коту Базилио вычислить сумму всех записанных чисел.



46. Три школьника Петя, Вася и Толя соревнуются в беге на дистанции АВ. Если Петя и Вася одновременно выбегут из пунктов А и В навстречу друг другу, а Толя выбежит с ними одновременно, то Петя и Вася встретятся в тот момент, когда Толя пробежит всю дистанцию. Если Петя и Толя побегут навстречу друг другу, а Вася выбежит с ними одновременно, то Петя и Толя встретятся в тот момент, когда Вася пробежит половину дистанции. Какую часть дистанции успеет пробежать Петя к моменту встречи Толи и Васи, если они побегут навстречу друг другу?

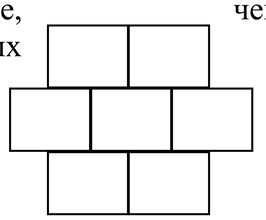
Вывод

47. На плоскости нарисован квадрат 4×4 клетки. По линиям образовавшейся сетки Вася проводит несколько горизонтальных и вертикальных прямых красным карандашом. Какое наибольшее число прямых он может провести так, чтобы при этом не образовалось ни одного квадрата, все стороны которого красные?

48. Расставьте по кругу 6 отличных от нуля попарно различных цифр так, чтобы любое трехзначное число, прочитанное по часовой стрелке, делилось на 7.

49. Восемь чёрных и восемь белых шашек разложены в 4 столбика. Известно, как эти столбики выглядят спереди, справа (верхние два рисунка) и сверху. Найдите цвет нижней шашки в заднем левом столбике.

50. Ане, Тане, Даше и Маше выдали по 3000 бусинок. Каждая бусинка – белого или черного цвета. Причем у Тани белых бусинок было вдвое больше, чем у Ани, а у Маши – вдвое больше, чем у Даши. У Даши черных бусинок было вдвое больше, чем у Тани, а у Ани – вдвое больше, чем у Маши. Сколько белых бусинок было у каждой из девочек?



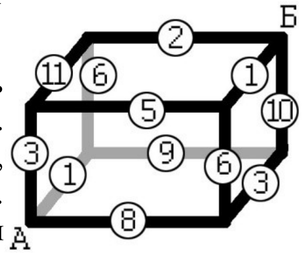
6 класс. 2009-2010 уч. год. Довывод

51. Найдите какое-нибудь число, у которого произведение суммы цифр на их количество равно 2010.

52. В магазин привезли три разных мешка с сахаром. Половина первого мешка весит в 6 раз больше чем треть второго мешка. Половина второго мешка весит в 9 раз больше чем треть третьего мешка. Во сколько раз треть первого мешка тяжелее половины третьего мешка?

53. По краю круглого циферблата, начиная с отметки «12», побежали муха и две мошки, причем мошки – по направлению движения часовой стрелки, а муха – против. С первой мошкой муха впервые встретилась на отметке «4», а со второй – на отметке «2» (во время встреч все продолжают движение без остановок). На какой отметке будет находиться первая мошка, когда муха снова встретится со второй?

54. Во дворце у царя 7 комнат, расположенных следующим образом. Некоторые комнаты пустые, в некоторых сидит принцесса, а в некоторых тигр. При этом в любой тройке комнат, каждые две из которых имеют общую стенку, сидит ровно один тигр и ровно одна принцесса. Всего пустых комнат больше, чем комнат с принцессами. Сколько во дворце принцесс, и в каких комнатах они сидят? Ответ необходимо обосновать.



55. На уроки танцев ходят 90 школьников, среди которых есть мальчики и девочки. Учитель разбил их на группы по 3 человека. В каждой из групп каждый школьник станцевал с каждым по разу, а школьники из разных групп между собой не танцевали. Оказалось, что было ровно 22 танца, в которых мальчик танцевал с мальчиком и ровно 38 танцев, в которых девочка танцевала с девочкой. Сколько было «смешанных» групп, в которые входили и мальчики, и девочки?

56. Петя придумал четырехзначное число, в записи которого все цифры различны. Известно, что сумма трех первых цифр этого числа делится на 9 и сумма трех последних цифр этого числа делится на 9. Какие значения может принимать сумма всех цифр этого числа? Найдите все возможные значения и объясните, почему других нет.

Вывод

57. Автомобили в Цветочном городе ездят на газированной воде с сиропом. В точке А – источник газированной воды, а в точке Б – автозаправка. Каждое ребро куба – труба, через которую можно пропустить столько воды, сколько на ней написано или меньше. В каждой вершине куба сидит коротышка, который может распределить поступающую к нему по какой-нибудь трубе газированную воду по двум другим трубам. По команде Знайки из источника выпустили ровно 12 тонн газированной воды. Как должны распределять воду коротышки, сидящим в вершинах куба, чтобы все 12 тонн благополучно дошли до автозаправки?

58. В тигриной семье трое тигрят. Они родились в один день, но, возможно, в разные годы. В день их рождения папа-тигр обнаружил, что их суммарный возраст в 5 раз больше, чем был суммарный возраст всех тигрят в этой семье 5 лет назад. Сколько лет

старшему, если известно, что его возраст меньше суммарного возраста двух других? Известно, что ни один тигрёнок, родившийся в тигриной семье, никуда из неё не уходил.

59. На клетчатой бумаге со стороной клетки 1 нарисован прямоугольник. Двумя разрезами по линиям сетки его разрезали на четыре прямоугольника. Шестиклассник Вася нашёл площади у трёх из этих прямоугольников и обнаружил, что произведение этих трёх чисел равно 30. Чему равен периметр исходного прямоугольника? Найти все варианты ответа и докажите, что других быть не может.

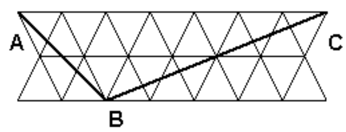
60. В трех сосудах налито какое-то (ненулевое) количество воды. В каждом из сосудов больше 10 литров, но меньше 50 литров. За одно переливание разрешено переливать одинаковое количество воды из двух сосудов в третий. Докажите, что за несколько переливаний можно сравнять количество воды во всех сосудах.

7 класс. 2007-2008 уч. год

61. Одновременно Ахиллес и черепаха начали двигаться навстречу друг другу. Гора Олимп находится ровно посередине между ними, но дорога от черепахи до Олимпа идёт по земле, а от Олимпа до Ахиллеса по асфальту. Известно, что Ахиллес движется по асфальту в 3 раза быстрее, чем черепаха по земле, а по земле они движутся с одинаковыми скоростями. Ахиллес добрался до Олимпа за час. Через какое время после этого он встретит черепаху, если продолжит движение, не останавливаясь?

62. В каждую клетку квадрата 3×3 записано целое число. При этом сумма чисел в каждой строке кроме первой на 1 больше, чем в предыдущей, и сумма чисел в каждом столбце кроме первого в 4 раза больше, чем в предыдущем. Докажите, что сумма чисел во второй строке делится на 7.

63. Плоскость расчерчена на равносторонние треугольники, как показано на рисунке. Найдите величину угла ABC.



64. Придумайте какой-нибудь способ представить число 2008 в виде суммы пяти натуральных слагаемых так, чтобы все цифры в записи этих слагаемых были различны..

65. У разбойника три монеты достоинством в 1, 1 и 2 динара: по монете в каждой руке и одна в кошельке. Разбойник поймал Али-Бабу и обещает отпустить его, если Али-Баба угадает, какая монета у него в левой руке. Али-Баба может задать всего один вопрос, причём разбойник ответит честно, если у него в правой руке 1 динар, и солжет, если там 2 динара. Помогите Али-Бабе придумать какой-нибудь вопрос, который позволит ему угадать монету в левой руке разбойника. Не забудьте объяснить, почему Вы считаете придуманный Вами вопрос подходящим.

66. Клетчатый прямоугольный стол 2007×2008 можно многими способами покрыть доминошками (в один слой) так, чтобы каждая покрывала ровно две клетки. Два покрытия назовем близкими, если одно можно получить из другого, переложив лишь часть доминошек (хотя бы одна доминошка не меняет положения). Докажите, что есть покрытие, близкое любому другому. (Стол вертеть нельзя).

7 класс. 2008-2009 уч. год

67. На столе стоят гирьки двух весов: тяжёлые и лёгкие. Все тяжёлые гирьки весят одинаково, и все лёгкие гирьки весят одинаково. Некоторые гирьки расставили по двум чашкам чашечных весов так, что весы оказались в равновесии. Если переставить две лёгкие гирьки с левой чашки на правую, то для того, чтобы сохранилось равновесие, придётся поставить на левую чашку со стола одну тяжёлую гирьку. Сколько лёгких

гирек пришлось бы поставить со стола на левую чашку, если бы первоначально с неё на правую чашку переставили одну тяжёлую гирьку?

68. Шахматный конь захромал, и, делая обычный ход буквой Г, наступает на каждую клетку, входящую в эту букву (например, чтобы сделать ход с a1 на b3, он наступить либо на клетки a1, a2, a3, b3, либо на клетки a1, b1, b2, b3). Может ли он так пройтись по квадратной доске размером 5×5, чтобы наступить на каждую клетку ровно один раз?

69. Расставьте в ряд числа 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 так, чтобы каждое число было делителем суммы всех предыдущих чисел (первое число должно без остатка делиться на второе, сумма первых двух – на третье, сумма первых трёх на четвёртое, и т.д.)

70. Лучи OA и OB образуют прямой угол. Любознательный семиклассник Петя провёл внутри этого угла лучи OC и OD, образующие угол 10°, а затем посчитал все острые углы между любыми парами нарисованных лучей (не только соседних). Оказалось, что сумма самого большого и самого маленького из найдённых углов составляет 85°. Найдите величины трёх углов, на который прямой угол разбивается лучами OC и OD.

71. На какое наибольшее число нулей может оканчиваться произведение трех трехзначных чисел, для записи которых использовалось 9 различных цифр?

72. Семиклассник Сеня Сидоров написал на доске трёхзначное число, в записи которого нет ни одного нуля. Затем он подписал все числа, которые можно получить из написанного числа перестановкой цифр. Сумма всех написанных на доске чисел составила 2775. Какое число придумал Сеня? (Найдите все варианты ответа и докажите, что других быть не может)

7 класс. 2009-2010 уч. год.

73. Существует ли натуральное число, произведение суммы цифр которого на их количество равно 2010?

74. Во дворце 49 комнат, расположенных в виде квадрата 7х7. Маляр 33-го разряда хочет покрасить 33 комнаты, начиная с любой них, причем каждый раз переходя в комнату, имеющую с только что покрашенной общую стену и не имеющую общих стен с комнатами, покрашенными ранее. Как ему это сделать?

75. По краю круглого циферблата, начиная с отметки «12», побежали муха и две мошки, причем мошки – по направлению движения часовой стрелки, а муха – против. С первой мошкой муха впервые встретилась на отметке «4», а со второй – на отметке «2» (во время встреч все продолжают движение без остановок). На каких отметках циферблата они могут встречаться втроем одновременно? Найдите все варианты ответа и объясните, почему нет других.

76. Куб составлен из 8 одинаковых бумажных кубиков, в каждом из которых лежит карточка. На каждой карточке написано одно из чисел 1, -1, 2, -2, 3, -3, 4, -4. При этом в соседних по грани кубиках числа имеют разный знак и разную абсолютную величину. Знайка и Незнайка по очереди вскрывают один из бумажных кубиков, и смотрят на лежащую внутри карточку. Выиграет тот, после чьего хода можно точно установить, какие карточки лежат в оставшихся кубиках. Кто выиграет при правильной игре, если Знайка ходит первым?

77. В школу танцев ходят мальчики и девочки. Учитель танцев разбил их в группы по 4 человека. В каждой из групп каждый школьник станцевал с каждым, а школьники из разных групп не танцевали. В отчёте учитель написал, что танцев, в которых мальчик танцевал с мальчиком, было на 20 больше, чем танцев, в которых девочка танцевала с девочкой. Заслуживает ли отчёт доверия?

78. Имеются три палочки, из которых составлен треугольник. Разрешается составить новый треугольник, отломив одинаковые кусочки от любых двух палочек и приклеив их к третьей. Семиклассник Петя уверен, что, действуя таким образом много раз, можно добиться того, чтобы треугольник стал равносторонним. Прав ли он?

8 класс. 2007-2008 уч. год.

79. Существуют ли четыре попарно различные числа *x, y, u, v*, такие что $\frac{x+u}{x+v} = \frac{y+u}{y+v}$?

80. На каждом поле клетчатой доски 7×7 первоначально стоит по шахматному королю. Королей снимают с доски по одному, причём разрешается снять только такого короля, который бьет нечетное число других королей (среди оставшихся на данный момент). Барон Мюнхгаузен утверждает, что может снять всех королей кроме одного. Можно ли ему верить?

81. На сторонах AB, BC, CA треугольника ABC выбрали точки D, E, F соответственно так, что EF || AB и ED || AC. Прямые DF и BC пересекаются в точке K. Оказалось, что DF = FK. Найдите отношение BE:EC.

82. На острове, где живут только всегда правдивые рыцари и всегда лгущие лжецы, в теледебатах участвовали 9 кандидатов с номерами от 1 до 9. Каждый кандидат заявил "Кандидат, чей номер равен последней цифре квадрата моего номера - рыцарь". Впоследствии выяснилось, что не все кандидаты были лжецами, но и рыцарей среди них было не более трех. Кто из них лжец, а кто – рыцарь?

83. Собственным делителем натурального числа называется любой его делитель, отличный от 1 и самого этого числа. Натуральное число назовём удивительным, если самый большой его собственный делитель на 1 меньше, чем квадрат самого маленького собственного делителя. Найдите все удивительные числа.

84. На доске в ряд выписаны 2007 чисел, причём каждое число кроме двух крайних равно сумме двух соседних с ним чисел. Известно, что сумма первых ста чисел в этом ряду равна нулю, а сумма первых двухсот чисел в этом ряду равна трём. Найдите сумму всех чисел в этом ряду.

8 класс. 2008-2009 уч. год.

85. Длину прямоугольника уменьшили на 10%, а ширину уменьшили на 20%. При этом периметр прямоугольника уменьшился на 12%. На сколько процентов уменьшится периметр прямоугольника, если его длину уменьшить на 20%, а ширину уменьшить на 10%?

86. В ряд выписаны 10 натуральных чисел. При этом по краям стоят две единицы, а в остальных местах – попарно различные натуральные числа, отличные от единицы. Известно, что произведение любых двух чисел, стоящих через одно число друг от друга, делится на число, записанное между ними. Найти наибольшее возможное значение количества простых чисел среди выписанных.

87. Могут ли расстояния от точки плоскости до вершин некоторого квадрата быть равными 1, 1, 2 и 3?

88. В кофейне встретились 55 индийцев и турков, каждый из которых пил либо чай, либо кофе. Все индийцы говорят правду, когда пьют чай, и обманывают, когда пьют кофе, а все турки – наоборот. На вопрос «Вы пьете кофе?» ответили «да» 44 человека, а на вопрос «Вы турок?» – 33 человека. С утверждением «На улице идет дождь» согласились 22 человека. Сколько индийцев в кофейне пьют чай?

89. Андрей, Борис, Василий, Геннадий и Дмитрий играли в настольный теннис парами так, что каждые двое сыграли с каждой другой парой ровно один раз. Ничьих в теннисе не бывает. Известно, что Андрей проиграл ровно 12 раз, а Борис ровно 6 раз. Сколько раз выиграл Геннадий?

90. Каждая из сторон треугольника разбита на 2008 равных частей. Через каждую точку деления проведены прямые, параллельные двум другим сторонам, в результате чего треугольник разбился на равные треугольные поля. Строкой будем называть ряд полей, заключенных между двумя соседними параллельными прямыми, либо одинокое поле при вершине треугольника. Петя и Вася ставят по очереди в одно из свободных полей числа 1 или -1. После того, как все поля оказываются занятыми, в каждой строке подсчитывается произведение. Петя выигрывает, если отрицательных произведений четное число, иначе выигрывает Вася. Кто выиграет при правильной игре, если первым ходит Петя?

8 класс. 2009-2010 уч. год.

91. Известно, что $\frac{x+y}{x-y}+\frac{x-y}{x+y}=3$. Найдите значение выражения $\frac{x^2+y^2}{x^2-y^2}+\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$.

92. Даны два четырехугольника, один из которых обладает двумя из ниже перечисленных свойств, другой – двумя остальными. Докажите, что один из них – ромб.

а) противоположные стороны попарно равны;

б) две противоположных стороны параллельны;

в) какие-то две соседние стороны равны;

г) диагонали перпендикулярны и делятся точкой пересечения в одном и том же отношении.

93. Назовем неотрицательное целое число зеброй, если в его записи строго чередуются четные и нечетные цифры. Может ли разность двух 100-значных зебр быть 100-значной зеброй?

94. На авторынке можно обменять три автомобиля Жигули на одну Волгу и один Мерседес, а три Волги на два Жигули и один Мерседес. Сможет ли коллекционер Вася, имея 700 Жигулей, получить 400 Мерседесов?

95. Правильный треугольник со стороной 2 разбит на треугольники со стороной 1. В вершины этих треугольников положены 6 одинаковых с виду монет. Известно, что две из них фальшивые, легче настоящих, и лежат в концах единичного отрезка. Как найти обе фальшивые монеты за 2 взвешивания на чашечных весах без гирь? (Фальшивые весят одинаково, настоящие – тоже).

96. Петя нашёл сумму всех нечётных делителей некоторого чётного числа, а Вася – сумму всех чётных делителей этого числа. Может ли произведение этих двух чисел быть точным квадратом?

9 класс. 2007-2008 уч. год

97. Для четырёх попарно различны\х чисел *x, y, u, v* выполнено равенство $\frac{x+u}{x+v}=\frac{y+v}{y+u}$.

Найдите сумму всех этих чисел.

98. Девятиклассник Петя считает, что при любой расстановке в клетках квадрата 4×4 восьми единиц, четырёх двоек и четырёх пятёрок либо найдутся две строки, в которых произведения одинаковы, либо – два столбца, в которых произведения одинаковы, либо строка и столбец, в которых произведения одинаковы. Прав ли он?

99. На стороне BC треугольника ABC выбрана точка K так, что угол CAK составляет половину угла ABC, и точка пересечения O отрезка AK с биссектрисой BL угла B делит этот отрезок на две равные части. Докажите, что AO×LC=BC×OL.

100. Собственным делителем натурального числа называется любой его делитель, отличный от 1 и самого этого числа. Натуральное число называется замечательным, если самый большой его собственный делитель на 1 больше, чем квадрат самого маленького собственного делителя. Найдите все замечательные числа.

101. Вершины вписанного четырёхугольника соединены отрезками с некоторой точкой внутри него, тем самым четырёхугольник разбит на 4 треугольника. Про один из этих треугольников известно, что он равносторонний, про второй – что он равнобедренный (не равносторонний), а про два оставшихся – что они прямоугольные. Докажите, что прямоугольные треугольники равны.

102. Ученики школы №2007 получили на контрольной работе по математике тройки, четверки и пятёрки. Девочек в школе в 2 раза меньше, чем мальчиков. Средняя оценка за контрольную среди девочек на 1 балл выше, чем средняя оценка всех учеников школы. Известно, что и среди девочек, и среди мальчиков встречается все три типа оценок. Найдите наименьшее возможное количество девочек в школе №2007.

9 класс. 2008-2009 уч. год

103. Расставьте в равенстве $(x^2 - *x + *)(x^2 - *x + *)(x^2 - *x + *)=0$ вместо звёздочек числа 2, 3, 4, 5, 6, 7 так, чтобы и сумма и произведение всех различных корней полученного уравнения были равны 6.

104. Карлсон и Фрекен Бок должны съесть торт и огромную плюшку. Карлсон съедает плюшку за 2 минуты, а торт за 3 минуты. Фрекен Бок съедает торт за 4 минут, а плюшку за 5 минут. Могут ли они вдвоём съесть и то, и другое быстрее, чем за 3 минуты? Каждое кондитерское изделие может поедаться ими одновременно.

105. Во вписанном четырехугольнике каждая сторона имеет длину либо 6, либо 8, а одна из диагоналей – длину 10. Найдите радиус описанной окружности.

106. В каждой клетке квадрата 3×3 записано натуральное число. При этом все числа попарно различны и отличны от единицы. Известно, что число, записанное в каждой из клеток, является делителем произведения всех чисел, стоящих в клетках, соседних с ней по стороне. Найти наибольшее возможное значение количества простых чисел среди выписанных.

107. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ $AB=10$, $BC=12$, $BD=15$ $\angle A=\angle D$ и $\angle ABD=\angle BCD$. Найдите длину отрезка CD.

108. Люк загадал двузначное число, разбил его на сумму двух различных натуральных чисел и сообщил одно из этих чисел роботу R2-D2, а второе роботу C-3PO. Само число Люк роботам не сообщал, а сказал только, что их числа различны, и дают в сумме двузначное число. После чего между роботами состоялся следующий диалог. R2-D2: «Я не знаю, какое из наших чисел больше». C-3PO: «И я этого не знаю. Сообщаю, что моё число делится на 17». R2-D2: «Теперь я знаю, какое число загадал Люк». Какое?

9 класс. 2009-2010 уч. год.

109. Прямая на координатной плоскости с уравнением y=px+q называется хорошей если она имеет ровно одну общую точку с графиком квадратного трёхчлена $y=x^2+qx+p$. Можно ли подобрать два различных числа p и q так, чтобы и прямая с уравнением y=px+q, и прямая с уравнением y= qx+p были хорошими прямыми?

110. На свободные поля шахматной доски по одной выставляются ладьи. Новую ладью разрешается выставить, если она бьёт четное число пустых клеток. Как, действуя таким образом, занять ладьями все 64 клетки доски?

111. Прямоугольный треугольник ABC (катет CB больше катета AC), вписан в окружность. На стороне BC выбрана точка D такая, что AC=BD, точка E середина дуги ACB. Найдите угол CED.

112. Петя нашёл сумму всех нечётных делителей некоторого чётного числа, а Вася – сумму всех чётных делителей этого числа. Может ли произведение этих двух чисел быть точным квадратом?

113. В тридевятом царстве всего четыре города, а движение на всех дорогах – одностороннее. Любые два города соединены парой противоположно направленных дорог, длины которых отличаются на 1 км. Назовем обход всех городов правильным, если он проходит через каждый город ровно по одному разу и начальный город совпадает с конечным (например: 1-2-4-3-1). Может ли оказаться, что любой правильный обход городов имеет такую же длину, как и обход этих городов в обратном порядке?

114. Натуральное число называется зеброй, если оно либо однозначно, либо в его записи строго чередуются четные и нечетные цифры. Докажите, что всякое натуральное число, начиная с числа 3, можно представить в виде суммы трех зебр.

10 КЛАСС. 2007-2008 УЧ. ГОД

115. Три положительных числа a, b, c образуют возрастающую арифметическую прогрессию. Докажите, что любой корень x_0 уравнения $ax^2+bx+c=0$ удовлетворяет неравенству $x_0<-2$.

116. В четырехугольнике $ABCD$ угол D острый, а угол A – тупой. Известно, что $CD=2AB$ и $S_{ACD}=2S_{ABD}$. Найдите отношение $\dfrac{S_{AOB}}{S_{COD}}$, где O – точка пересечения диагоналей четырёхугольника.

117. Дан стандартный набор домино. Из восьми доминошек этого набора составьте магический квадрат 4×4 (т.е. квадрат, в котором во всех строчках, столбцах и каждой из двух диагоналей содержится одинаковое количество точек) с минимальным возможным количеством точек.

118. На нижней ступеньке лестницы из 130 ступенек лежит 130 камней, остальные ступеньки пусты. За ход Сизиф может взять с любой ступеньки группу из одного или нескольких камней (не обязательно всех, лежащих на этой ступеньке), и переложить всю группу вверх или вниз на число ступенек, равное числу камней в группе (группу из одного камня на соседнюю ступеньку, группу из два камня – через одну ступеньку вверх или вниз и т.д.). Помогите Сизифу переложить все камни на соседнюю ступеньку, сделав не более 15 ходов.

119. На координатной плоскости даны четыре точки A(0;0), B(2007;2007), C(0;2007), E(–2007;0). Можно ли так подобрать целые числа b, c, чтобы график квадратного трёхчлена $y=x^2+bx+c$ пересекал каждую из прямых AB, BC, CE и AE, причём все точки пересечения имели бы целые координаты?

120. Делитель натурального числа называется собственным, если он отличен от 1 и самого этого числа. Натуральное число назовём восхитительным, если самый большой собственный делитель этого числа равен сумме собственного делителя, второго по величине и собственного делителя, третьего по величине. (Например, число 18

восхитительное: 9=6+3). Сколько существует восхитительных чисел, не превосходящих полтора миллиона?

10 класс. 2008-2009 уч. год

121. Расставьте в равенстве $(x^2 - *x + *)(x^2 - *x + *)(x^2 - *x + *)=0$ вместо звёздочек числа 2, 3, 4, 5, 6, 7 так, чтобы и сумма и произведение всех различных корней полученного уравнения были равны 6?

122. В каждой клетке квадрата 2008×2008 стоит целое число. При этом в каждой строке квадрата образовалась арифметическая прогрессия. Докажите, что сумма всех чисел в таблице делится на 4.

123. AA_1, BB_1, CC_1 – медианы треугольника ABC. O_1, O_2, O_3 – точки пересечения медиан треугольников AA_1B, BB_1C и CC_1A соответственно. Найти площадь треугольника $O_1O_2O_3$, если площадь треугольника ABC равна 1.

124. На каждой клетке шахматной доски стоит по королю черного или белого цвета так, что каждый бьет больше королей чужого цвета, чем своего. Может ли белых и черных королей быть не поровну? (Король бьёт на одну клетку по вертикали, горизонтали или диагонали в любом направлении)

125. Имеется много коробок, в каждой из которых лежат шарики трёх цветов: красные, синие и белые (все три цвета присутствуют в каждой коробке). Красный шарик настолько же легче белого, насколько белый легче синего. Известно, что в каждой коробке лежит по 20 шариков, в одной из самых тяжёлых коробок (возможно, есть другие такого же веса, но нет более тяжёлых) 7 красных, 12 белых и 1 синий шарик, а всего синих шариков 1000. Какое наименьшее количество красных шариков может лежать в коробках?

126. Люк загадал двузначное число, разбил его на сумму двух различных натуральных чисел и сообщил одно из этих чисел роботу R2-D2, а второе роботу C-3PO. Само число Люк роботам не сообщал, а сказал только, что их числа различны, и дают в сумме двузначное число. После чего между роботами состоялся следующий диалог. R2-D2: «Я не знаю, какое из наших чисел больше». C-3PO: «И я этого не знаю. Сообщаю, что моё число делится на 17». R2-D2: «Теперь я знаю, какое число загадал Люк». Какое?

10 класс. 2009-2010 уч. год.

127. Прямая на координатной плоскости с уравнением $y=px+q$ называется хорошей если она имеет ровно одну общую точку с графиком функции $y=x^4+qx-p$. Два числа p и q подобраны так, что прямая с уравнением $y=px+q$ – хорошая. Докажите, что прямая с уравнением $y= qx+p$ тоже хорошая.

128. На столе стоит куб с ребром 3, составленный из 27 маленьких кубиков с ребром 1. Отрезок, соединяющий центры двух соседних кубиков, называется устойчивым, если он составляет с плоскостью стола угол 45 градусов. Сколько устойчивых отрезков можно провести в этом кубе? Кубики называются соседними, если они имеют общую грань, ребро или вершину.

129. Факториалом натурального числа n называется произведение всех натуральных чисел от 1 до n (обозначение n!). Например, $4!=1\cdot2\cdot3\cdot4=24$. Докажите, что существует бесконечно много натуральных чисел представимых в виде произведения двух факториалов натуральных чисел несколькими (двумя или более) различными способами.

130. На большем катете AC прямоугольного треугольника ABC с прямым углом C как на диаметре построена полуокружность, пересекающая гипотенузу AB. На полуокружности

выбрана точка P такая, что CP=BC, а на катете AC выбрана точка Q такая, что AQ=AP. Отрезок BQ пересекает полуокружность в точке S. Докажите, что $\angle CSP=2\angle CBP$.

131. В квадрате 2009×2009 расставлены числа так, что в каждой строке числа образуют арифметическую прогрессию, а в каждом столбце – геометрическую прогрессию. Докажите, что знаменатели всех геометрических прогрессий совпадают.

132. В волшебной стране существует автомастерская, которая может переделывать автомобили по следующим схемам: 3 машины «Жигули» переделываются в одну «Волгу» и один «Мерседес»; 3 машины «Волга» переделываются в 2 машины «Жигули» и один «Мерседес». Какое наибольшее число «Мерседесов» можно получить из 2009 «Жигулей»?

11 класс. 2007-2008 уч. год

133. Решите уравнение $\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}+\sqrt{x^{2007}-x}=\sqrt{x-1}$.

134. Дан произвольный треугольник ABC. Строится последовательность треугольников по следующему правилу. Три стороны треугольника $A_1B_1C_1$ равны синусам углов треугольника ABC, три стороны треугольника $A_2B_2C_2$ равны синусам углов треугольника $A_1B_1C_1$ и т.д. Найдите отношение площади треугольника $A_1B_1C_1$ к площади треугольника $A_{2007}B_{2007}C_{2007}$.

135. Четыре положительных числа $a, b, c, d,$ взятые именно в таком порядке, образуют возрастающую арифметическую прогрессию. Докажите, что любой корень x_0 уравнения $ax^3+bx^2+cx+d=0$ удовлетворяет неравенству $x_0 < -1$.

136. На нижней ступеньке лестницы из 130 ступенек лежит 130 камней, остальные ступеньки пусты. За ход Сизиф может взять с любой ступеньки группу из одного или нескольких камней (не обязательно всех, лежащих на этой ступеньке), и переложить всю группу вверх или вниз на число ступенек, равное числу камней в группе (группу из одного камня на соседнюю ступеньку, группу из два камня – через одну ступеньку вверх или вниз и т.д.). Помогите Сизифу переложить все камни на соседнюю ступеньку, сделав не более 15 ходов.

137. На длинном столе в ряд лежат 2007 кучек по одному ореху. Первый и второй ходят по очереди. За ход нужно найти какие-нибудь две соседние кучки (то есть без кучек между ними), где правая не меньше левой, и объединить их в одну. Тот, кто делает последний ход, выигрывает. Кто из играющих может всегда выигрывать, как бы не играл противник?

138. Шестигранник ABCDKLMN вписан в сферу, его грани ABCD и KLMN лежат в параллельных плоскостях, а ABLK, BCML, CDNM, DAKN – его остальные грани. Известно, что AB×LM=BC×KL. Докажите, что шестигранник ABCDKLMN является либо усечённой пирамидой, либо прямой призмой.

11 класс. 2008-2009 уч. год

139. Какое наибольшее значение может принимать сумма косинусов всех углов равнобедренного треугольника? (фольклор)

140. Из пункта A в пункт B одновременно отправились два туриста. Первый турист прошёл весь путь со скоростью v, а второй поделил свой путь на семь равных участков и двигался с постоянной скоростью на каждом из участков. Известно, что его скорость на каждом участке, кроме первого, была больше скорости на предыдущем участке на одну и ту же величину, а на четвёртом участке он двигался со скоростью v. Кто пришёл в пункт B раньше?

141. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром 1. Прямая l проходит через точку E, середину ребра C_1D_1, и пересекает прямые AD_1 и A_1B. Найдите расстояние от точки E до точки пересечения прямой l с прямой A_1B.

142. Докажите, что при любом натуральном k существует бесконечно много чисел, которые можно представить как в виде суммы k последовательных натуральных чисел, так и в виде суммы $k+1$ последовательного натурального числа.

143. В марсианском домино на каждой половинке костяшки может быть от нуля до 2008 очков, а в остальном правила те же. Все костяшки, кроме дублей, выложены в ряд так, что на соприкасающихся половинках – одинаковое число очков. Таким образом, очки на полукостяшках образуют последовательность чисел. В памяти автомата «Доминатор» изначально содержится число 0. Автомат по очереди считывает числа последовательности и заменяет на каждом шаге число, содержащееся в его памяти, на модуль разности между этим числом и очередным членом последовательности. Какое число получит «Доминатор» в конце концов, если последовательность начиналась с числа 2007?

144. В одной из клеток прямоугольника 2008×99 стоит число –1, а в остальных клетках стоят единицы. За один ход разрешается заменить число –1 в одной из клеток на 0, а все числа в клетках, соседних с ней по стороне, умножить на –1. Докажите, что, в какой бы клетке ни стояло изначально число –1, действуя таким образом, можно сделать так, что вся таблица будет состоять из одних нулей.

11 класс. 2009-2010 уч. год.

145. Найдите все решения уравнения $2^{|x|} + 2^{\frac{1}{1-|x|}} = 2$.

146. Существует ли замкнутая шестизвенная не плоская ломаная такая, что длины всех ее звеньев равны и углы между соседними звеньями равны?

147. В ряд слева направо лежит 8 кошельков, в каждом по 13 одинаковых монет. Из одного кошелька переложили одну монету в соседний справа кошелек. Кошельки открывать нельзя. Как за два взвешивания на чашечных весах без гирь найти кошелек, где меньше всего монет?

148. Прямая на координатной плоскости с уравнением $y=px+q$ называется хорошей если она имеет ровно одну общую точку с графиком квадратного трёхчлена $y=x^2+qx+p$. Докажите, что на координатной плоскости можно выбрать две точки так, чтобы любая хорошая прямая проходила через одну из этих точек.

149. Диагонали, проведенные из любой вершины n-угольника, делят угол при этой вершине на равные части. При каких значениях n существует такой n-угольник, не являющийся правильным?

150. Сумма квадратов двух различных натуральных чисел делится на произведение их наибольших собственных делителей. Найдите наименьшее возможное значение полученного частного.

Решения первых 30 задач

5 класс. 2007-2008 уч. Год

1. Ответ: 12 кг.

Решение. Вес молока, заполняющего бидон наполовину, составляет 6 кг. Поэтому вес бидона составляет 14–6=8 кг, а вес молока, заполняющего бидон полностью, составляет 20–8=12 кг. Значит, вес бидона, заполненного на треть, равен 4+8=12 кг.

2. Ответ: за 8 ходов.

Решение. Первые несколько ходов определяются однозначно: $1\to2\to4\to8\to16$. Далее за 4 хода можно добраться до числа 100: $16\to61\to68\to86\to100$. Получить трёхзначное число быстрее нельзя. В самом деле, трёхзначное число нельзя получить за один ход из числа, меньшего 86. Значит, чтобы получилось менее 8 ходов, нужно за 3 хода получить из 16 число, большее или равное 86. Но, возможные серии из трёх ходов легко просчитываются: $16\to61\to68\to82$, или $16\to61\to68\to86$, или $16\to23\to28\to82$, или $16\to23\to28\to36$, или $16\to23\to32\to37$. Более коротких вариантов нет.

Примечание. Решение становится очень наглядным, если использовать так называемое дерево перебора.

3. Ответ: три кучки, содержавшие по 12, 12 и 9 орехов.

Решение. Из условия сразу же следует, что в конце получились либо 3 кучки по 11 орехов, либо 11 кучек по 3 ореха. Но второй случай невозможен, так как число кучек должно быть меньше числа орехов в получившихся кучках. Значит, получилось 3 кучки по 11 орехов, а первоначально имелись три кучки, содержавшие 12, 12 и 9 орехов соответственно.

4. Ответ: все трое.

Решение. Первое утверждение, сделанное старшим братом, ложно, поскольку старше его никого нет. Значит, он лжец и второе его утверждение тоже ложно. Но старше его никого нет, поэтому кота получил он сам. Первое утверждение, сделанное младшим братом, тоже ложно, поскольку младше его никого нет. Значит, он тоже лжец и получил мельницу. Средний же брат утверждает, что младший получил кота, а старший мельницу. Но на самом деле всё обстоит как раз наоборот, поэтому он тоже лжец.

5. Годится следующий пример.

	Л	Л			Л	Л	
	Л	Л			Л	Л	
	Л	Л			Л	Л	
	Л	Л			Л	Л	

Видно, что ладьи в левых верхних углах маленьких квадратиков 2×2 бьют 2 ладьи и 2 пустые клетки. Ладьи в правых нижних углах маленьких квадратиков 2×2 бьют 4 ладьи и 4 пустые клетки. Остальные ладьи бьют 3 ладьи и 3 пустые клетки.

6. Ответ: 287.

Решение. Суммируя все числа по столбцам, видим, что сумма всех чисел таблицы в 21 раз больше суммы чисел первого столбца. Значит, сумма всех чисел делится на 21.

Если 2008 – сумма чисел во 2-й строке, то сумма всех чисел равна 2007+2008+2009=6024, что не делится даже на 7. Если 2008 – сумма чисел в 3-й строке, то сумма всех чисел равна 2006+2007+2008=6021, что не делится на 7. И только в случае, когда 2008 – сумма чисел в 1-й строке, получаем сумму всех чисел 2008+2009+2010=6027, что при делении на 21 даёт в сумме 287.

7. Ответ: 3 или 4.

Решение. Пусть гиря А уравновешивается гирями В и С, а гиря В – гирями Д и Е. Гиря В может быть только средней, гиря А только тяжёлой, а гири Д и Е только лёгкими. Гиря С может быть лёгкой или средней. В первом случае тяжёлая гиря уравновешивается тремя лёгкими гирями, а во втором – четырьмя.

8. Годится следующий пример: 2008=1970+23+4+6+5.

9. Ответ: нет, не сможет.

Решение. На каждом из кубиков должно быть по цифре 1 и 2, иначе нельзя составить комбинации 11 и 22. Кроме того, на одном из кубиков обязательно должен быть 0. Если на втором кубике нуля нет, то на нём должны быть все цифры от 3 до 9. Но их всего 7, а граней на кубике 6. Если же 0 есть и на втором кубике, то останется всего 6 свободных граней, по которым нужно расставить 7 цифр от 3 до 9.

10. Ответ: ребус имеет 4 решения 9385+1047=10432, 9387+1045=10432, 9486+1057=10543 и 9487+1056=10543.

Решение.

1) Л=1, т.к. сумма двух цифр не превосходит 18.

2) Имеем С+1=1Ы либо С+1+1=1Ы (если есть переход через разряд). Поскольку С<10, то Ы=1 или Ы=0. Единица уже занята, поэтому Ы=0.

3) Прибавляя к Н ноль получаем Ж. Значит, из предыдущего разряда сюда перешла единица. Но Ж не равно 0 (цифра 0 занята), поэтому перехода в следующий разряд нет и С+1=10, то есть С=9.

4) Н+1=Ж и (Е+Ж=1Н либо Е+Ж+1=1Н). Поскольку Н меньше Ж на единицу, то либо Е=9, либо Е+1=9. Но С=9, поэтому Е=8 и Г+И=1Я. Очевидно, Я>1.

5) Итак, 9Н8Г +10ЖИ=10ЖНЯ.

Остались цифры: 2,3,4,5,6,7. Причем Н и Ж – две соседние. Но это не пары (6,7) или (5,6), поскольку тогда Г+И<12 (Г и И берутся из оставшихся цифр). Пара (2,3) отпадает, поскольку Г+И в этом случае должно быть равно как минимум 14, а это невозможно.

6) Н=3, Ж=4 => 9385+1047=10432 либо 9387+1045=10432.

Н=4, Ж=5 => 9486+1057=10543 либо 9487+1056=10543.

5 класс. 2008-2009 уч. Год

11. Ответ. Одинаково.

Решение. Спуститься с 6 этажа на первый пешком займет 5 минут. Чтобы с 6 этажа доехать на 1 на лифте, надо проделать такой маршрут: 6 – 20 – 9 – 23 – 12 – 1. А он займет тоже 5 минут.

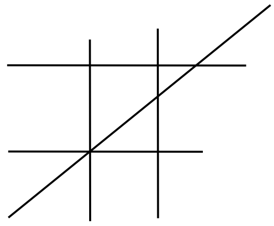
12. Ответ. Решение единственное: 89+19=108.

Решение. Очевидно, что У=1 и А – четная цифра. А не может быть меньше 8, иначе результат не будет трехзначным числом, итак А=8. При сложении из разряда единиц должен произойти переход 1 в разряд десятков, а, значит, Х может равняться только 9. Отсюда единственное решение: 89+19=108.

13. Ответ: 300 кирпичей.

Решение. Ниф-Нифу, Нуф-Нуфу и Наф-Нафу вместе не хватает 600 кирпичей, чтобы построить 3 домика, а не один. Значит, на 2 домика понадобилось бы как раз 600 кирпичей. А значит, один поросячий домик строится из 300 кирпичей.

14. Например, так. См. рисунок справа.



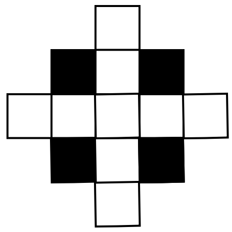
15. Ответ: 1 минуту.

Решение. Путь от Простоквашино до места встречи, который Матроскин проделал за 30+5=35 минут, Шарик проделал за 30-5=25 минут. Следовательно, путь от места встречи до Печкино, который Шарик проделал за 5 минут, в 5 раз меньше пути от от Простоквашино до места встречи. Поэтому Матроскин проделает путь от места встречи до Печкино за 7 минут. Значит, Шарику остаются 2 минуты, и он должен поделить их поровну между дорогой от места встречи в сторону Простоквашино, и обратной дорогой до места встречи.

16. Ответ. Наташа самая красивая.

Решение. Ира не может быть самой красивой, потому что иначе ее фраза верная, а она обязана лгать. Значит, возможны два варианта: Ира самая умная или самая хитрая. Если Ира самая умная, то она сказала правду, и Галя не может быть самой красивой. Тогда самая красивая – Наташа. Если же Ира самая хитрая, то высказывание Наташи ложно, и Наташа может быть только самой красивой. Итак, в любом случае Наташа самая красивая.

17. Ответ. Нет, не может.



Решение. Рассмотрим клетки, которые отмечены на рисунке черным цветом. Заметим, что если летучая ладья начала своё движение в одной из этих клеток, то она не сможет из них выйти. С другой стороны, попасть в черную клетку можно только с черной клетки. Значит, если ладья начала ходить в черных клетках, она их не сможет покинуть, а если она начала ходить в белых клетках, то не сможет попасть в черные клетки.

18. Ответ. 10-2-4-8-3-9-6-7-1-5.

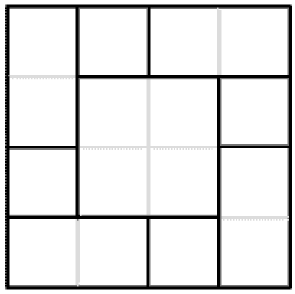
19. Ответ: 521.

Решение Три различные цифры могут давать в сумме 8 лишь в следующих случаях: 1+2+5 или 1+3+4. Но, как показывает неравенство, 4×134>431, второй вариант невозможен. Значит, исходное трёхзначное число, записывается цифрами 1, 2, 5, и после перестановки могло получиться только число 125. Исходное число было именно 521, а не 512, т.к. переставлялись только две цифры.

20. Ответ. Белая.

Решение. Верхняя шашка на правом заднем столбике – белая (это видно по виду сверху). Теперь смотрим на вид справа. Белая шашка только на высоте два. Значит, в правом заднем столбике всего две шашки (нижняя черная, верхняя белая). Кроме того, в заднем левом столбике 5 шашек, 3 верхних черные. Всего шашек 16, а в задних столбиках 7. Значит, в передних столбиках 9 шашек. При этом в каждом переднем столбике не более 5 шашек, в правом переднем их ровно 5, и цвета этих шашек мы видим (2 чёрных и 3 белых). Значит, в левом переднем столбике 4 шашки: 2 белых и 2 чёрных. Итак, мы узнали цвета всех шашек, кроме двух нижних в заднем правом столбике. При этом у нас получилось: 1+3+2=6 белых шашек и 1+3+2+2=8 чёрных шашек. Значит, две оставшиеся шашки белые.

5 класс. 2009-2010 уч. Год



21. Мешок соли весит на 10 кг больше мешка сахара, а мешок сахара весит на 5 кг больше мешка крупы. Значит, мешок соли на 15 кг тяжелее мешка крупы.

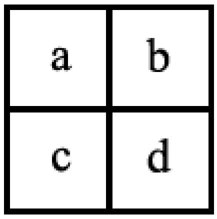
22. Решение указано на рисунке.

23. <u>Ответ</u>. Толстый.

<u>Решение</u>. Чтобы донести груз, Толстому нужно сделать 30 рейсов из точки А в точку В и 29 обратных рейсов из точки В в точку А. На один рейс у него уходит 50 минут, а на весь путь уйдёт 50×59=2950 минут. Тонкому муравью нужно сделать 50 рейсов из точки А в точку В и 49 обратных рейсов из точки В в точку А. У него на один рейс уходит 30 минут, а на весь путь уйдёт 30×99=2970 минут. Поэтому Толстый окончит свою работу раньше.

24. <u>Ответ</u>. Оба из ордена Белой розы.

<u>Решение</u>. Если первый рыцарь принадлежит ордену Алой розы, то первое его заявление правдивое, а второе лживое. Значит, второй рыцарь принадлежит ордену Белой розы. Тогда первый раз он солгал, а второй раз сказал правду. Выходит, что правдивых и лживых утверждений сказано поровну. Это противоречит «правдивому» утверждению 2-го рыцаря. Значит, первый рыцарь принадлежит ордену Белой розы. При этом первое его заявление лживое, а второе правдивое, и второй рыцарь тоже принадлежит ордену Белой розы.



25. <u>Ответ</u>. 30, 36 и 60.

<u>Решение</u>. Обозначим площади маленьких прямоугольников буквами *a, b, c, d*. Тогда равны произведения *ad*=*bc*, поскольку каждое из этих произведений есть произведение одних и тех же четырёх отрезков. Поэтому площадь четвёртого прямоугольника может принимать следующие значения: $\frac{4\cdot 8}{16}=2,\ \frac{4\cdot 16}{8}=8,\ \frac{16\cdot 8}{4}=32$. Соответственно, площадь большого прямоугольника может принимать значения 30, 36 и 60.

26. <u>Ответ</u>: 15 «смешанных» групп.

<u>Решение</u>: Всего было 30 групп и в каждой группе было 3 танца. Значит, всего было 90 танцев. При этом «смешанных» танцев, в которых танцевали девочка и мальчик, было 90–22–38=30. Но в каждой «смешанной» группе было по 2 «смешанных» танца. Значит, «смешанных» групп было 15.

27. Например, можно действовать по следующей схеме.

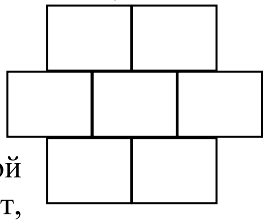
1 сосуд	2 сосуд	3 сосуд
39	9	3
30	0	21
23	14	14
20	11	20
17	17	17

28. <u>Ответ</u>. нет, нельзя.

Решение. Суммы 14 и 13 можно получить из слагаемых 1, 2, 3, 4, 5 только одним способом: 14=2+3+4+5, 13=1+3+4+5. Поэтому отрезки 1 см и 2 см должны отмечаться на разных концах линейки. Но из слагаемых 3, 4, 5 нельзя получить ни сумму 11, ни сумму 10. Поэтому отрезок длины 12 с помощью этой линейки отмерять будет нельзя.

29. Ответ. принцесса одна и она сидит в центральной комнате.

Решение**.** Пронумеруем комнаты слева направо на каждом этаже: 1–2, 3–4–5, 6–7. Если в центральной комнате (под номером 6) принцессы нет, то в одной из комнат 1–2 сидит принцесса. Аналогично – в паре комнат 3–6 и в паре комнат 5–7. Значит, принцесс не менее трёх. Но тогда остальные четыре комнаты пустые, и тигров нет вообще, что невозможно. Поэтому в центральной комнате обязательно сидит принцесса. Пусть принцесса сидит ещё в какой-нибудь комнате. Поскольку схема подземелья симметрична, можно считать, что принцесса сидит, например, в комнате 1. Но тогда тигры сидят: в комнате 2, в одной комнате из пары 3–6, в одной комнате из пары 5–7. Нашли двух принцесс и трёх тигров. Но тогда пустых комнат тоже не более двух, то есть не больше, чем комнат с принцессами, что противоречит условию.



30. Ответ. 4, 8 и 12.

Решение. Из условия следует, что муха бегает в 2 раза быстрее первой мошки. Между встречей с первой и встречей со второй мошкой муха пробегает 2 деления, а первая мошка пробежит одно. Это значит, что к моменту встречи мухи со второй мошкой первая будет находиться на отметке 5, то есть на расстоянии трёх делений от места встречи.

С каждой новой встречей мухи и второй мошки первая «удаляется» от них еще на три части. Значит, все трое встретятся тогда, когда муха со второй мошкой пробегут в сумме 4 круга, т.е. будут на отметке «8».

Рассуждая аналогично, получим следующую встречу на отметке «4», затем на отметке «12» и т.д.

Авторы задач:

Адельшин А.В. 2, 9, 30, 42, 47, 51, 53, 68, 73, 75, 87, 94, 113, 132.

Кукина Е.Г. 11, 16, 17, 20, 49, 123.

Усов С.В. 3, 10, 15, 19, 23, 25, 27, 29, 33, 34, 35, 38, 39, 44, 45, 48, 50, 54, 57, 58, 60, 63, 65, 71, 72, 76, 78, 82, 88, 90, 92, 95, 98, 99, 101, 102, 105, 108, 116, 117, 122, 125, 126, 134, 137, 138, 143, 150.

Шаповалов А.В. 5, 8, 18, 21, 36, 37, 64, 69, 80, 93, 96, 110, 114, 118, 124, 136, 147.

Штерн А.С. 4, 6, 7, 12, 24, 26, 31, 32, 40, 41, 43, 46, 52, 55, 56, 59, 61, 62, 67, 70, 72, 77, 83, 86, 100, 106, 109, 112, 115, 119, 120, 121, 127, 129, 131, 135, 142, 148.

Комментированный тематический рубрикатор

Применительно к нашему рубрикатору, термин «тематический» звучит весьма неточно. Мы не только хотели разбить задачки по темам, но и попытались классифицировать те трудности, которые, на наш взгляд, испытывает школьник при решении нестандартных задач. Если уж мы говорим о необходимости подготовки к олимпиадам, то строить такую подготовку нужно не только «по темам», но и «по трудностям», не забывая о том, что одни и те же проблемы могут вызывать у школьника задачи, тематически весьма далёкие друг от друга.

Алгоритмы и стратегии

Такие задачи мы считаем очень важными, если не ключевыми, для массовой олимпиады, рассчитанной на широкий круг участников, не имеющих специальной подготовки. Мы предлагаем их ученикам всех классов с пятого по одиннадцатый.

Задачи на построение алгоритмов, позволяющих добиться нужной цели: 2, 27, 36, 57, 60, 78, 80, 95, 104, 118, 136, 144, 147.

Задачи на анализ предложенного в условии алгоритма с точки зрения его скорости или возможных результатов: 1, 40, 143.

Задача на построение выигрышных стратегий в играх: 11, 40, 143.

Числовые конструкции

Задачи, в которых требуется построить числа или наборы чисел, обладающих заданными свойствами. Подобные задачи для старших могут быть достаточно сложными и требовать для решения использования математической индукции, всякого рода соображений, связанных с делимостью и т.д. Задачи же такого для маленьких проверяют, в первую очередь, комбинаторные способности и наличие своеобразного умения легко и свободно жить в мире чисел.

Задачи 8, 18, 19, 37, 48, 51, 64, 69, 73, 93, 98, 114, 129.

Геометрические конструкции

Этот тип задач очень полезен для диагностики и развития геометрических способностей во время обучения в 5-6 классе, когда геометрия ещё систематически не изучается.

Задачи 5, 14, 22, 42, 68, 74, 110, 124, 146.

Логический перебор

Наверное, это вторая по распространённости тема в наших олимпиадах. К этой проблематике относятся ребусы, задачи о лжецах и рыцарях, перебор случаев в геометрических задачах и т.д. Ясно, что умение аккуратно перебирать возможные случаи, не теряя ни одного из них, важно не только при решении олимпиадных задач, но и в процессе любых занятий математикой.

Задачи 4, 7, 9, 10, 12, 16, 24, 28, 29, 39, 40, 41, 44, 54, 82, 88. Перебор в геометрии: 87, 92, 101, 105.

Арифметические задачи на движение

Задачи 15, 23, 30, 32, 34, 46, 53, 61, 75.

Устная алгебра

Эти задачи традиционно считают арифметическими, однако хотелось бы заметить, что в процессе их решения школьник использует скорее алгебраические приёмы (вынесение за скобку общего множителя, работа с пропорциями, прибавление одой величины к обеим частям равенства). Но этот процесс происходят без использования букв! Решение таких задач для ученика 5-6 класса весьма эффективно с точки зрения подготовки к серьёзному изучению алгебры.

Задачи 21, 25, 35, 43, 50, 52, 58, 59.

Делимость

Тема, которой покорны все возраста. Из основных навыков, необходимых для решения таких задач, нужно отметить уверенное владение свойствами делимости и умение анализировать разложение числа на простые множители. Во многих из предлагаемых задач отчётливо присутствует комбинаторный элемент, хотя нигде не используются никакие комбинаторные формулы.

Задачи 3,6, 33, 56, 58, 62, 77, 83, 86, 96, 100, 106, 120, 122, 150.

Моделирование

Такие задачи традиционно называют текстовыми. В них требуется грамотно перевести условие на язык алгебры с помощью введения удачно выбранного набора переменных, проделать необходимые преобразования и дать содержательную интерпретацию полученного в ходе выкладок результата. Отметим, что эти задачи вовсе не обязательно связаны с решением уравнения или неравенства. Основные «потребители» – ученики 7-9 классов.

Задачи 72, 77, 85, 94, 113, 142.

Алгебраические преобразования

Задачи, где основные трудности связаны с проведением алгебраических преобразований, требующих известной изобретательности.

Задачи 79, 91, 97, 109, 122, 127, 131, 148.

Уравнения

Задачи разной сложности для старшеклассников. Они посвящёны не только решению уравнений, но и изучений свойств корней уравнения в ситуации, когда найти эти корни явно не удаётся.

Задачи 103, 115, 119, 121, 127, 133, 145.

Оценки и неравенства

Мы очень редко предлагаем на олимпиадах задачи на решение или доказательство неравенств. В этом разделе преобладают алгебраические, геометрические и логические задачи, в которых требуется сделать оценку на некоторую величину или найти её наибольшее (наименьшее) значение.

Задачи 13, 50, 102, 120, 125, 132, 139, 140, 149. 150.

К этой же тематике примыкают известные олимпиадные задачи типа «оценка + пример»: 47, 71, 86, 106, 117.

Планиметрия

Не претендуя на оригинальность, перечислим всё же список наших любимых планиметрических тем: подсчёт углов в многоугольниках и иных плоских конструкциях, подобие и пропорции, площади, многоугольник и окружность.

Задачи 38, 63, 70. 81, 99, 105, 107, 111, 116, 123, 130, 134, 135.

Стереометрия

В варианте 11-го класса стереометрическая задача выглядит достаточно естественно. Есть и задачи на проверку и тренировку пространственного воображения у младших.

Задачи 20, 128, 138, 141, 146.

Готовимся к олимпиаде на уроках

И. А. Чернявская

Школьный урок – это либо алгебра, либо геометрия. И в первую очередь нам хотелось бы остановиться на геометрии. Без геометрической задачи не обходится ни одна олимпиада. В рамках 1 – 3 этапов решение геометрической задачи практически не использует фактов, выходящих за рамки школьной программы, и, тем не менее, геометрические задачи котируются как одни из самых трудных (их традиционно решает очень маленький процент участников олимпиады). В чем загвоздка? Существует ли принципиальная разница между олимпиадной задачей и обычной школьной задачей хорошего уровня сложности или её нет? Каким идеям и методам нужно уделить внимание при изучении геометрии в школе, чтобы учащиеся не пасовали перед нестандартными задачами?

Самый беглый анализ позволяет выделить несколько важных различий в постановках, методах решений задач, с которыми школьники сталкиваются на уроках, в сравнении с теми задачами, которые предлагаются на олимпиадах:

1) на школьных уроках мы слишком увлекается вычислительными задачами в ущерб задачам на доказательство, между тем как олимпиадная геометрическая задача – это почти наверняка задача на доказательство (и даже если вопрос задачи звучит как «найдите угол *ABC*», это фактически предполагает доказательство, что он, например, равен 60 градусам),

2) если решение некой олимпиадной задачи все-таки можно построить на аналитических выкладках, то доминировать там будут не арифметические вычисления, а алгебраические преобразования. Это означает, что школьников нужно учить работать с параметрами в геометрических задачах.

3) и, наконец, самое существенное – решение содержательной геометрической задачи чаще всего сопровождается дополнительными построениями. А значит, умение выполнять дополнительные построения *нужно постепенно формировать* посредством удачно подобранных задач.

Отрадно заметить, что все перечисленные проблемы могут быть успешно решены при правильной подачи материала еще в седьмом – первой половине восьмого класса, т.е. на самой первой стадии систематического изучения геометрии. Все содержательные вычислительные теоремы появятся позже, а в начале самое время заняться задачами на доказательство. Программные темы, связанные с задачами на построение, также естественным образом можно развить до выполнения дополнительных построений в прочих задачах. Совершенно неподъемная для большинства школьников олимпиадная тема «геометрические неравенства» вполне естественно укладывается в стандартный школьный курс сразу после изучения темы «Неравенство треугольника». Вот и поговорим о

Геометрических неравенствах

Используемые факты

1) *В треугольнике против большего угла лежит большая сторона; против большей стороны лежит больший угол;*
2) *Сумма двух сторон треугольника больше третьей стороны.*

Предлагаемая подборка задач (количество задач избыточно, что позволит учителю выбрать задачи по своему вкусу и с ориентиром на уровень подготовки учащихся) может быть предложена в конце 7 класса сразу после изучения указанных выше фактов или в начале 8 класса на этапе повторения. Геометрические неравенства представляют собой достаточно мощный инструмент исследования, который потребуется не раз при изучении других тем школьной (и олимпиадной) геометрии, поэтому хорошо бы не ограничиваться самостоятельным занятием, а время от времени «подсовывать» школьникам задачки соответствующего содержания. Наша цель – добиться того, чтобы эти неравенства применялись ребятами автоматически, скажем, как в алгебре – формулы сокращенного умножения.

Задача 1. Найдите наименьшее возможное значение периметра неравнобедренного треугольника, длины сторон которого – целые числа.

Задача 2. Дан отрезок AB длины 1, точка C – произвольная точка плоскости. Что можно сказать о сумме длин $AC+CB$? Что можно сказать о разности $AC-CB$? Объясните, когда достигается равенство в указанных вами неравенствах.

Задача 3. Пусть BD – биссектриса треугольника ABC. Докажите, что $AB > AD$ и $CB > CD$.

Решение. Так как BD – биссектриса, то $\angle ABD = \angle DBC = \alpha$. Рассмотрим треугольник ABD. Его $\angle BDA$ является внешним по отношению к треугольнику BDC, а значит, равен сумме двух не смежных с ним углов: $\angle DBC + \angle BCD = \alpha + \angle BCD$, что больше, чем $\angle ABD = \alpha$. В треугольнике против большего угла лежит большая сторона, значит $AB > AD$. Аналогично докажем второе неравенство.

Задача 4. В треугольнике ABC длина медианы AM больше половины длины BC. Докажите, что угол BAC – острый.

Решение. Рассмотрим треугольник ABM. Так как $AM > BM$, то $\angle ABM > \angle BAM$. Аналогично из треугольника AMC следует, что $\angle MCA > \angle MAC$. Сложим два полученных неравенства: $\angle ABM + \angle MCA > \angle BAM + \angle MAC$, откуда следует, что в треугольнике ABC $\angle B + \angle C > \angle A$, т.е. угол BAC – острый.

Идея сложения неравенств, возникшая в задаче 4, как и другие правила работы с неравенствами, очень важна. Культура работы с неравенствами будет формироваться постепенно на уроках алгебры, но как приятно ребятам убедиться, что оттачиваемые на алгебре умения очень естественно применяются на уроках геометрии.

Решение следующей задачи почти целиком строится на удачном сложении некоторых верных неравенств для треугольников.

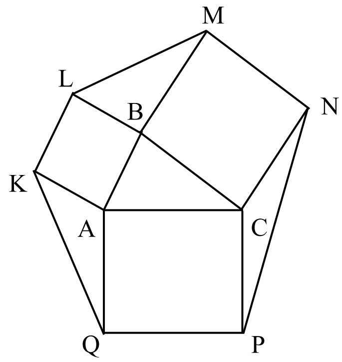
Задача 5. Докажите неравенства в четырехугольнике:

a) каждая сторона четырехугольника меньше суммы трех других его сторон;
b) сумма диагоналей выпуклого четырехугольника больше суммы его противоположных сторон;
c) сумма диагоналей выпуклого четырехугольника меньше периметра, но больше полупериметра этого четырехугольника.

Задача 6. Дан остроугольный треугольник ABC. На его сторонах во внешнюю сторону построены квадраты $AKLB$, $BMNC$ и $CPQA$. Докажите, что периметр шестиугольника $KLMNPQ$ больше удвоенного периметра треугольника ABC.

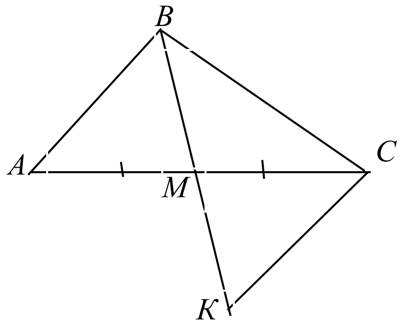
Решение. Очевидно, что $KL+MN+PQ$ равно периметру треугольника ABC. Покажем, что сумма $LM+NP+KQ$ больше периметра ABC. Рассмотрим сумму углов при вершине A: $\angle BAC+\angle CAQ+\angle QAK+\angle KAB=360°$. Учтём, что $\angle BAC$ – острый, $\angle CAQ=\angle KAB=90°$.

Значит, $\angle QAK$ – тупой. Аналогично доказывается, что углы B и C в треугольниках BLM и CNP, соответственно, тупые. Следовательно, стороны KQ, LM и NP – большие в рассмотренных треугольниках. Запишем неравенства: $KQ>AK$, $LM>MB$, $NP>CP$. Так как $AK=AB$, $MB=BC$ и $CP=AC$, то $KQ+LM+MP > AB+BC+AC$, что и требовалось доказать.



Следующие задачи примечательны тем, что для их решения требуется выполнить дополнительные построения.

Задача 7. Докажите, что медиана треугольника меньше полусуммы сторон треугольника, выходящих из той же вершины.



Решение. Пусть BM – медиана треугольника ABC, докажем, что $BM<0,5(AB+BC)$. Продлим медиану за точку M на свою длину, получим точку K, соединим точку K с вершиной C. Треугольники AMB и CMK равны по двум сторонам и углу между ними, тогда $AB=CK$. В треугольнике BCK $BK<BC+CK$, т.е. $2BM<BC+AB$, откуда и следует требуемое.

Задача 8. *Теорема об объемлющей ломаной:*
а) Внутри треугольника ABC отмечена точка O. Докажите, что $AO+OC<AB+BC$;
б) Красная Шапочка пошла из точки A к домику бабушки (точка B) по тропинке, которая вместе с отрезком AB является границей выпуклого многоугольника. Серый Волк пошел по тропе с тем же свойством, причем находящейся внутри первого многоугольника. Докажите, что волчья тропа короче.

Решение. *а)* Продлим AO до пересечения с BC. Пусть M - точка пересечения. $OC<OM+MC$. $AM=AO+OM<AB+BM$. Тогда $OM+AO+OC<OM+MC+AB+BM$, откуда следует, что $AO+OC<AB+BC$. Пункт *б)* – обобщение пункта *а*), здесь нужно продлить стороны внутреннего многоугольника до пересечения с контуром внешнего и воспользоваться фактом, что любая сторона выпуклого многоугольника меньше суммы остальных его сторон.

Задача 9. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ угол A равен углу B, а угол D больше угла C. Докажите, что $BC > AD$.

Решение. Продлим прямые AD и BC до пересечения в точке O. Треугольник ABO – равнобедренный, тогда $AO=OB$.
Если углы A и B четырехугольника $ABCD$ были тупыми, то рассмотрим треугольник DOC: т.к. $\angle D > \angle C$, то $OC > OD$, а значит $BC > AD$.
Если углы A и B были острыми, то рассмотрим треугольник DOC, в котором $\angle D < \angle C$, т.е. $OC < OD$, а значит $BC > AD$.

Задача 10. Сколько сторон может иметь выпуклый многоугольник, у которого все диагонали равны?

Решение. Такой многоугольник может иметь 4 или 5 сторон. Докажем, что не существует многоугольника с этими свойствами, у которого не менее шести сторон. Рассмотрим выпуклый многоугольник $A_1A_2...A_n$, его вершины A_1, A_2, A_4, A_5 образуют выпуклый четырехугольник, у которого по условию сумма противоположных сторон A_2A_4 и A_1A_5 равна сумме диагоналей A_2A_5 и A_1A_4, что не возможно по задаче 5.

Наверное, каждый из читателей испытал удовольствие, когда вдруг с помощью удачного дополнительного построения коротко и красиво решается не поддававшаяся до той поры задача. Красота – это немаловажно, но иные задачи просто невозможно решить без дополнительного построения. А значит, будем учиться их выполнять. Существует довольно много хороших книг, в которых методы решения задач, в том числе, с помощью дополнительных построений, систематизированы. Классический пример – книга Полонского В.Б. и др. Геометрия: Задачник к школьному курсу. – М.: АСТ-ПРЕСС, 1998. Однако с чисто методической точки зрения не стоит посвящать каждому типу построений отдельное занятие. Задачи соответствующего содержания должны появляться на уроках регулярно, постепенно формируя у школьников видение, как проводить «ревизию чертежа»: где стоит продлить отрезки до пересечения, где удлинить медиану, где построить вспомогательную параллельную прямую и т.д. Школьная геометрия 8 класса – прекрасное поле для формирования умения выполнять

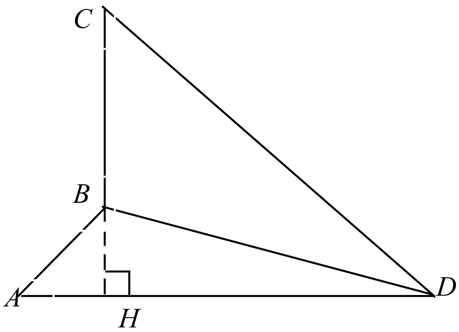
Дополнительные построения

Наверное, первая естественная мысль, которая может побудить школьника что-нибудь дорисовать, такая: «Мне не нравится этот чертеж! А почему?» Известные отрезки расположены далеко друг от друга? Эти углы равны, но не принадлежат одному треугольнику? Данных много, но нет ни одного «жесткого» треугольника? От этих вопросов только шаг до естественного построения – перенести известные элементы поближе друг к другу или просто

Продлить отрезки до пересечения

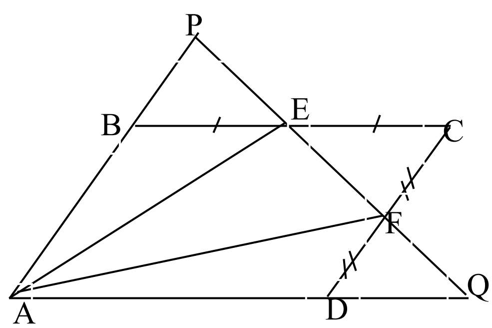
Задача 1. Парус имеет вид четырехугольника *ABCD*, углы *A*, *C* и *D* которого равны 45°. Найдите площадь паруса, если *BD* = 4 м.

Решение. По условию $\angle B = 225°$. Продлим отрезок *CB* до пересечения со стороной *AD* в точке *H*. Рассмотрим треугольник *CHD*: т.к. $\angle C = \angle D = 45°$, то $\angle CHD = 90°$, а значит треугольники *CHD* и *ABH* – прямоугольные и равнобедренные. Сумма их площадей равна площади паруса. Пусть $BC = x,\ BH = y$, тогда $AH = y,\ HD = x + y$. $S_{ABH} = 0,5y^2$, $S_{CHD} = 0,5(x+y)^2$. Но по теореме Пифагора для треугольника *BHD* $y^2 + (x+y)^2 = 4^2$. Тогда площадь паруса равна $0,5 \cdot 4^2 = 8$.



Задача 2. В параллелограмме *ABCD* точки *E* и *F* – середины сторон *BC* и *CD* соответственно. Могут ли лучи *AE* и *AF* делить угол *BAD* на три равные части?

Решение. Продлим отрезок *EF* до пересечения с прямыми *AB* и *CD* в точках *P* и *Q* соответственно. Так как *BE* = *EC* (по условию), ∠*PBE* = ∠*ECF* (*AB* || *CD*) и ∠*BEP* = ∠*CEF,* то равны треугольники *BEP* и *CEF.* Аналогично доказывается равенство треугольников *DFQ* и *CFE*. Следовательно, *PE* = *EF* = *FQ.*



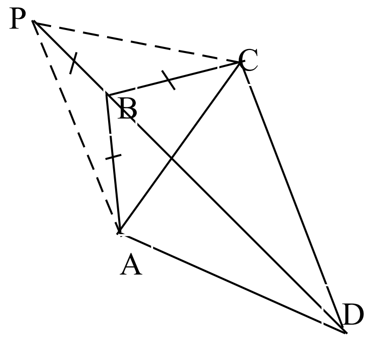
Предположим, что равны углы *BAE, EAF* и *FAD.* Тогда, из доказанного равенства получим, что

AE – биссектриса и медиана треугольника *PAF,* а *AF* – биссектриса и медиана треугольника *EAQ,* то есть каждый из этих отрезков является также и высотой треугольника. Таким образом, из точки *A* проведены два различных перпендикуляра к прямой *EF*, что невозможно.

В следующей задаче работает другая идея достроения.

Задача 3. В выпуклом четырёхугольнике *ABCD* выполнены равенства $\angle CBD=2\angle ADB$, $\angle ABD=2\angle CDB$, $AB=CB$. Доказать, что $CD=AD$.

Решение. Продлим отрезок *BD* за точку *B* на расстояние $BP=BA=BC$. Тогда $\angle ABD$ есть внешний угол в равнобедренном треугольнике *ABP*, поэтому он вдвое больше угла *APD,* откуда следует равенство $\angle APD=\angle CDP$. Значит, прямые *AP* и *CD* параллельны. Аналогично доказывается параллельность прямых *AD* и *CP.* Тогда четырёхугольник *APCD* - это параллелограмм и его диагонали в точке пересечения делятся пополам. Это означает, что в равнобедренном треугольнике *ABC* отрезок *BD* делит пополам сторону *AC,* а, значит, перпендикулярен стороне *AC.* Тогда наш параллелограмм *APCD* имеет перпендикулярные диагонали, то есть, является ромбом. Поэтому $CD=AD$.



При изучении школьной темы «Четырехугольники», начиная от параллелограмма и заканчивая трапецией, практически всегда существует возможность знакомить школьников со специальными видами дополнительных построений. Скажем, задачи, в которых фигурирует медиана, нередко красиво решаются, если

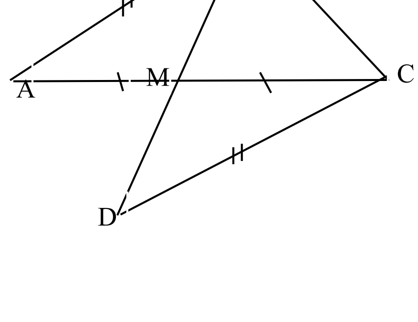
Удвоить медиану

Задача 4. Постройте треугольник по двум его сторонам и медиане, проведенной к третьей стороне.

Мы не будем подробно описывать решение этой задачи, которое требует дополнительного построения, описанного нами в теме «Геометрические неравенства». Очевидно, что с помощью удвоения медианы данная задача сводится к построению треугольника по трем сторонам. Для нас эта задача ценна тем, что это именно задача на построение, и, решив ее, школьники уже более естественно будут пробовать использовать дополнительные построения в вычислительных задачах или задачах на доказательство. Не упускайте возможность включить в урок задачу на построение!

Задача 5. В треугольнике *ABC* медиана *BM* перпендикулярна стороне *BC, AB:BC*=2:1. Найдите угол *ABC* треугольника.

Решение. Удвоим медиану *BM,* получим точку *D*. Из равенства треугольников AMB и CMD следует, что AB=CD. Но тогда в прямоугольном треугольнике DBC гипотенуза CD в два раза больше катета BC, а значит $\angle BDC=30°$. Тогда $\angle ABC=\angle ABD+\angle DBC=30°+90°=120°$.



Задача 6. На сторонах *AB* и *BC* треугольника *ABC* вне его построены квадраты *ABDE* и *BCKM*. Докажите, что отрезок *DM* в два раза больше медианы *BP* треугольника *ABC.*

Задача известная, но очень красивая! Использует ту же идею. Удвоим медиану ВР – получим новую точку Q. Докажем равенство треугольников DBM и QCB.

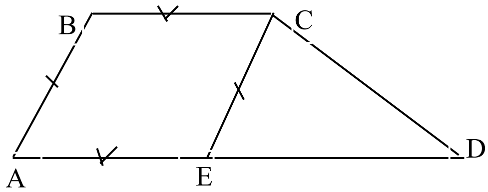
При изучении школьного курса после того, как мы вдоволь поработали с параллелограммом, появляется трапеция – четырехугольник, у которого только две стороны параллельны. Так вот именно в таких задачах попытка достроить трапецию до параллелограмма или отрезать от нее параллелограмм часто позволяет получить красивое решение. А для этого нужно

Провести вспомогательную параллельную прямую

Задача 7. Постройте трапецию, если известны длины всех ее сторон.

И снова задача на построение! Опыт недавнего семиклассника не очень велик – он научился выполнять с помощью циркуля и линейки элементарные построения: биссектриса угла, серединный перпендикуляр и т.д., а еще он умеет строить треугольник по трем элементам. А здесь трапеция… А мы хотим треугольник, да не просто треугольник, а треугольник, в котором известны три элемента! По условию задачи рассчитывать на углы не приходится, значит неплохо бы вычленить треугольник с тремя известными сторонами. И возникает

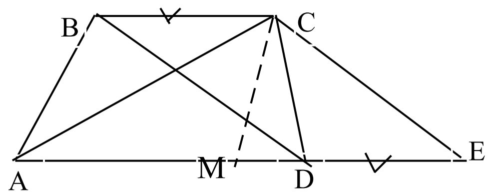
Решение. Пусть трапеция ABCD уже построена. Проведем через ее вершину С прямую, параллельную АВ до пересечения с прямой AD в точке Е. Но тогда четырехугольник АВСЕ – параллелограмм, а значит АВ=СЕ, ВС=АЕ. Но тогда в треугольнике ECD мы знаем длины всех сторон. Начнем построение трапеции с этого треугольника.



Содержательным в этой задаче является и исследование, всегда ли возможно построение. …И снова неравенство треугольника.

Задача 8. Диагонали AC и BD трапеции $ABCD$ взаимно перпендикулярны, а длина средней линии равна m. На большем основании AD взята точка M, что $AM = m$. Найдите MC.

Решение. Учитывая, что диагонали трапеции перпендикулярны, здесь напрашивается провести через вершину С прямую, параллельную диагонали BD. Обозначим точку пересечения этой прямой с прямой AD через Е. Так *как* DBCE – параллелограмм, то отрезок АЕ равен сумме длин оснований трапеции и равен $2m$. По условию $AM = m$, но тогда M – середина АЕ. Так как $BD \parallel CE$, то $\angle ACE = 90°$, но тогда CM – медиана прямоугольного треугольника, которая равна половине гипотенузы. Т.е. $CM = m$.



Задача 9. На боковых сторонах АВ и ВС равнобедренного треугольника АВС отмечены точки К и L так, что AK+CL=KL. Из середины М отрезка KL проведена прямая, параллельная ВС, которая пересекает АС в точке N. Найдите угол KNL.

Решение. Через точку К проведем прямую, параллельную ВС, она пересечет АС в точке Е. В силу параллельности $\angle AEK = \angle ACB$, но тогда треугольник АКЕ – равнобедренный и АК=КЕ.

Рассмотрим трапецию EKLC, MN – ее средняя линия, тогда $MN = \frac{KE + LC}{2} = \frac{AK + LC}{2} = \frac{KL}{2}$. Значит в треугольнике KNL медиана MN равна половине стороны, к которой она проведена, откуда следует, что $\angle KNL = 90^\circ$.

Более половины задач, которые нами были рассмотрены, взяты из олимпиадных заданий разных уровней, но все они изящно решаются с помощью дополнительных построений и вполне могут быть использованы на обычном уроке геометрии. Если учитель не выдаст «страшной тайны», то никто из ребят и не узнает, что сражается с олимпиадной задачкой. Останется только совместная радость от красоты решения!