

Турнир им. А.П.Савина, 2015 год

Математический квадрат

Ответы, 6 класс

Логика

Л1. Влад

Л2. 16, 17, 18

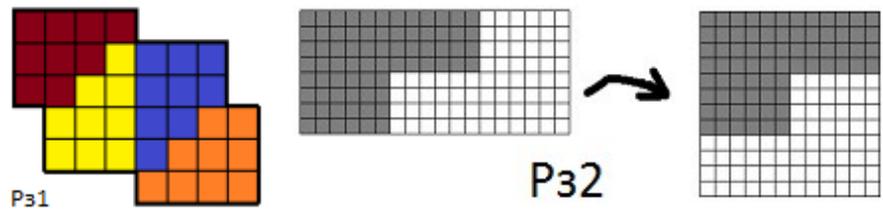
Л3. Дашу и Глеба.

Л4. 1008

Л5. 3, 4, 5 или 7.

Разрезания

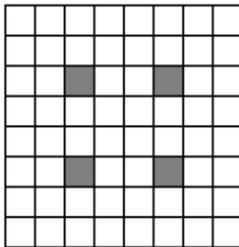
Рз1, Рз2. Например, так



Рз3. 16

Рз4. (1), 2, 3, 4, 6, 12, 24.

Рз5.



Дроби

Д1. Например, 0,58 (примеров много).

Д2. 2013.

Д3. Выпито поровну

Д4. 231 или 241.

Д5. На 4 нуля.

Календарь

К1. 5.

К2. 2020

К3. Воскресеньем.

К4. 1, 2, 3 раза

К5. 100.

Ребусы

Ре1. Все суммы 12, в вершине 4, на отрезках из вершины пары (1, 7), (2, 6) и (3, 5) так, чтобы тройка (1, 5, 6) была на одной горизонтали. асставьте в кружках треугольника все цифры от 1 по 7 (каждое по одному разу) так, чтобы сумма чисел вдоль каждого отрезка прямой была одна и та же.

Ре2. 1, 2, 2, 3, 3, 1, 3, 1, 1, 2.

Ре3. Все примеры такие: в вершинах 1, 2 и 3, суммы на сторонах либо $1+5+9+2=1+6+7+3=2+4+8+3$, либо $1+6+8+2=1+4+9+3=2+5+7+3$.

Ре4. Минимальная сумма 13. Все примеры такие: в середине 4, в верхних кружках 1 и 2. Пример сумм на отрезках вдоль ломаной: $3+9+1=1+8+4=4+7+2=2+5+6=13$.

Ре5. Примеров много, скажем 0, 8, 1, 9, 2, 5, 3, 6, 4, 7 (0 — в вершине, далее по кругу).

www.ashap.info/lgry/index.html

7 класс

Логика

Три брата вернулись с рыбалки. Мама спросила у каждого, сколько они вместе поймали рыб. Вася сказал: “Больше десяти”, Петя: “Больше восемнадцати”, Коля: “Больше пятнадцати”. Сколько могло быть поймано рыб (укажите все возможности), если известно, что два брата сказали правду, а третий – неправду?

Ответ: 16, 17, 18

В один из городов острова рыцарей и лжецов приехал Фантомас. Некоторые жители побеседовали с Фантомасом, а некоторые из тех, кто побеседовал, даже пригласили его в гости. На вопрос "Вы разговаривали с Фантомасом?" положительно ответили 50% горожан, а на вопрос "Вы пригласили его в гости?" - 60%. Кого больше среди тех, кто разговаривал с Фантомасом, но не пригласил его в гости, рыцарей или лжецов и на сколько процентов от общего числа жителей?

Ответ: лжецов больше на 10%.

Саня дружит с Алексеем, Верой, Глебом, Дашей и Евгением. У него День Рождения. Если пригласить Алексея, то тогда надо пригласить и Веру. Обязательно нужно пригласить либо Глеба, либо Веру, но приглашать их вместе не стоит. Также нужно пригласить либо Дашу, либо Евгения, либо обоих вместе. Дашу можно приглашать либо вместе с Глебом, либо никого из них. А если пригласить Евгения, то тогда необходимо пригласить Алексея и Дашу. Кого же всё-таки надо пригласить?

Ответ: Дашу и Глеба.

За круглым столом стоят 2015 человек. Каждый из них — рыцарь, который всегда говорит правду, или лжец, который всегда лжет. Оказалось, что рядом с каждым лжецом сидит ровно один лжец. Каждого из сидящих за столом спросили, сколько лжецов сидит рядом с ним. Несколько человек ответили, что один, а все остальные — что два. Какое наименьшее количество лжецов может сидеть за столом?

Ответ: 1008

В компании из 100 друзей, среди которых есть рыцари, лжецы и нормальные люди были произнесены следующие высказывания: «Среди моих друзей 0 лжецов»; «Среди моих друзей 1 лжец»; и т.д. до фразы «Среди моих друзей 99 лжецов». Через минуту в той же компании прозвучали те же фразы, но каждую фразу произнёс не тот человек, что в первый раз. Еще через минуту в той же компании прозвучали те же фразы, но ни один человек не повторил уже произнесенных им фраз, и так далее. Каждый произнёс 99 различных фраз. Сколько лжецов могло находиться в этой компании?

Ответ: 0 или 1.

Геометрия

Разделите прямоугольник размером 18×8 на две части так, чтобы из них можно было составить квадрат.

Ответ: пример

Из середины M стороны AB равностороннего треугольника ABC опустили перпендикуляры MK и ML на стороны AC и BC . Найдите KL , если $AB = 1$.

Ответ: $KL = \frac{1}{2}$.

Сколькими способами можно из клетчатого квадрата 4×4 (жестко закрепленного) вырезать по линиям сетки пять уголков из трех клеток?

Ответ: 16

Приведите пример семиугольника, который можно разрезать на параллелограммы. Покажите на чертеже, как это сделать.

Ответ: пример

В остроугольном треугольнике ABC : $\angle A = 30^\circ$; BB_1 и CC_1 – высоты; B_2 и C_2 – середины сторон AC и AB соответственно. Под каким углом пересекаются прямые B_1C_2 и C_1B_2 ?

Ответ: под прямым углом.

Суммы и произведения

Найдите сумму $1 - 3 + 5 - 7 + 9 - \dots - 2015$.

Ответ: -1008

Чему равно произведение $(1 - 1/4) \cdot (1 - 1/9) \cdot \dots \cdot (1 - 1/400)$?

Ответ: $21/48$.

Найдите знакочередующуюся сумму $502 \cdot 500 - 503 \cdot 499 + 504 \cdot 498 - 505 \cdot 497 + \dots + 1000 \cdot 2 - 1001 \cdot 1$.

Ответ: 125250

Чему равно произведение $(2^3 - 1)/(2^3 + 1) \cdot (3^3 - 1)/(3^3 + 1) \cdot \dots \cdot (100^3 - 1)/(100^3 + 1)$?

Ответ: $2/3 \cdot (1 + 1/(100 \cdot 101)) = 20202/30300$.

Запишите арифметическое выражение $(3^2 + 1)(3^4 + 1) \cdot \dots \cdot (3^{(2^n)} + 1)$ без скобок и многоточий.

Ответ: $(3^{(2^{n+1})} + 1)/(3^2 - 1)$ (без скобок и многоточий).

Алгебра

Частное от деления двух одночленов равно $9x^2y$, а их произведение равно x^8y^9 . Чему они могут быть равны?

Ответ: $3x^5y^5$ и $\frac{1}{3}x^3y^4$

или

$-3x^5y^5$ и $-\frac{1}{3}x^3y^4$

Говядина без костей стоит 450 рублей за килограмм, говядина с костями – 390 рублей за килограмм, а кости без говядины – 75 рублей за килограмм. Сколько костей в килограмме говядины?

Ответ: 160 грамм.

$$\frac{a+b}{c}, \frac{b+c}{a} \text{ и } \frac{c+a}{b}$$

Числа a , b и c таковы, что выражения $\frac{a+b}{c}$, $\frac{b+c}{a}$ и $\frac{c+a}{b}$ принимают одинаковое значение. Какое?

Ответ: 2 или -1 .

Известно, что $(a - b + 2015)$, $(b - c + 2015)$ и $(c - a + 2015)$ — три последовательных целых числа. Найдите эти числа.

Ответ: 2014, 2015 и 2016.

Для перевозки почты из почтового отделения на аэродром был выслан автомобиль «Москвич». Самолёт с почтой приземлился раньше установленного срока, и привезённая почта была отправлена в почтовое отделение на попутной грузовой машине. Через 30 мин. езды грузовая машина встретила на дороге «Москвич», который принял почту и, не задерживаясь, повернул обратно. В почтовое отделение «Москвич» прибыл на 20 мин.

раньше, чем обычно. На сколько минут раньше установленного срока приземлился самолёт?

Ответ: 40 мин.

Расположите в порядке возрастания числа:

2222^2 ; 22^{22} ; 2^{2222} ; 22^{2^2} ; 2^{22^2} ; $2^{2^{22}}$; $2^{2^{2^2}}$.

Ответ:

$2222^2 < 2^{2^{2^2}} < 22^{2^2} < 22^{22} < 2^{2222} < 2^{22^2} < 2^{2^{22}}$

Последовательные числа

Найдите восемь последовательных целых чисел, сумма первых трех из которых равна сумме остальных пяти. Укажите все варианты.

Ответ: -11; -10; ... -4.

Сколько последовательных натуральных чисел, начиная с 1, надо сложить, чтобы получить трехзначное число, записываемое одинаковыми цифрами?

Ответ: 36.

Среди чисел $1, 2, \dots, n$ ровно восемь чисел делятся на 6 и ровно шесть чисел делятся на 7. Найдите число n .

Ответ: 48.

На какую цифру может оканчиваться сумма первых n подряд идущих натуральных чисел?

Ответ: 0, 1, 3, 5, 6, 8.

Сумма цифр нескольких (не менее двух) натуральных последовательных чисел равна 15. Сколько может быть чисел? Укажите все варианты.

Ответ: от 2 до 5 чисел

8 класс

Комбинаторика

Заведующая библиотекой, увидев, что 8 томов «Малой энциклопедии козлов» стоят в беспорядке, указала на это библиотекаря. Тот в ответ заявил: «Беспорядок – небольшой, так как каждый том стоит либо на своем месте, либо на соседнем». Сколькими способами можно расставить тома энциклопедии в соответствии с этим условием?

Ответ: 34

В детский сад завезли карточки для обучения чтению: на некоторых из них написан слог МА, на остальных – слог НЯ. Каждый ребенок взял по три карточки и стал составлять слова. Оказалось, что из своих карточек 20 детей могут сложить слово МАМА, 30 детей – слово НЯНЯ, а 40 детей – слово МАНЯ. У скольких детей все три карточки одинаковые?

Ответ: у 10.

Тетрадный лист раскрасили в 23 цвета по клеткам. Пара цветов называется хорошей, если существуют две соседние клетки, закрашенные этими цветами. Каково наименьшее количество хороших пар?

Ответ: 22.

В некоторых клетках таблицы 100×100 стоят крестики. Каждый крестик является единственным либо в строке, либо в столбце. Какое наибольшее количество крестиков может стоять в таблице?

Ответ: 198.

В одной компании было x человек (каждый – рыцарь или лжец). Каждый произнес фразу: «Среди всех остальных (не считая меня) не больше n рыцарей и не больше k лжецов». Чему мог быть равен x в зависимости от n и k ?

Ответ: $n+1 \leq x \leq n+1+k$

Алгебра

При каких целых a уравнение $ax^2+x-a^2=0$ имеет хотя бы один целый корень?

Ответ: $a = 0$.

Решите уравнение

$$\sqrt{x - \sqrt{3 - 8\sqrt{35 - 8\sqrt{19}}}} = 2$$

Ответ: $\sqrt{19}$

Найдите наибольшее значение выражения $(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2$ при условии $a^2+b^2+c^2=1$.

Ответ: 3

Найдите такую пару натуральных чисел n и m , что $\sqrt{n} - \sqrt{m} = \sqrt{1000}$, и сумма $n+m$ наименьшая из всех возможных.

Ответ: $n = 1210, m = 10$.

Известно, что $(2x^2-x+1)(y^2+4y+8)(z^2-2z+3)=7$. Найдите $x+y+z$.

Ответ: -0,75.

Геометрия

Пусть O – центр окружности, описанной около треугольника ABC . Какие углы могут быть у этого треугольника, если четырёхугольник $ABOC$ – ромб?

Ответ: 120, 30, 30.

H – ортоцентр треугольника ABC , в котором $AC=BH$. Найдите величину угла ABC .

Ответ: 45° и 135°

В кузове грузовой машины размера $3\text{м} \times 2\text{м}$ оставили бревно длиной 2 метра с гвоздем в середине. Бревно при движении автомобиля свободно каталось в кузове и царапало его. Какая часть дна кузова могла быть испорченной? Ответ дайте с помощью рисунка.

Ответ: Прямоугольник 3×2 м со скруглёнными краями, то есть вместо углов – четвертинки окружностей радиуса 1.

В прямоугольном треугольнике биссектриса прямого угла делит гипотенузу в отношении 1:4. В каком отношении делит гипотенузу высота, проведенная из вершины прямого угла?

Ответ: 1: 16

На плоскости построили четыре окружности с центрами в вершинах прямоугольника $O_1O_2O_3O_4$ и радиусами r_1, r_2, r_3, r_4 соответственно. Оказалось, что окружности пересекаются в одной точке. Какие значения может принимать знакопеременная сумма квадратов радиусов $r_1^2 - r_2^2 + r_3^2 - r_4^2$?

Ответ: 0

Простые числа

На карточках по одному написаны все целые числа от 1 до 15. Одну карточку потеряли и оказалось, что сумма чисел на остальных карточках – простое число. Какая карточка могла быть потеряна? (Укажите все варианты)

Ответ: 7, 11, 13.

Найдите все тройки простых чисел, в которых одно равно разности кубов двух других.

Ответ: 2, 3 и 19.

Найдите все простые числа, которые равны сумме двух простых чисел и разности двух простых чисел.

Ответ: 5.

Знайка хочет составить число из различных цифр так, чтобы любые две стоящие подряд цифры образовывали простое число. Какое наибольшее число он может получить?

Ответ: 89731.

Сколькими способами число 100 можно представить в виде суммы трех простых чисел? (порядок слагаемых не важен)

Ответ: 4.

Последовательные числа

Найдите восемь последовательных целых чисел, сумма первых трех из которых равна сумме остальных пяти. Укажите все варианты.

Ответ: -11; -10; ... -4.

Сколько последовательных натуральных чисел, начиная с 1, надо сложить, чтобы получить трехзначное число, записываемое одинаковыми цифрами?

Ответ: 36.

Среди чисел $1, 2, \dots, n$ ровно восемь чисел делятся на 6 и ровно шесть чисел делятся на 7. Найдите число n .

Ответ: 48.

На какую цифру может оканчиваться сумма первых n подряд идущих натуральных чисел?

Ответ: 0, 1, 3, 5, 6, 8.

Сумма цифр нескольких (не менее двух) натуральных последовательных чисел равна 15. Сколько может быть чисел? Укажите все варианты.

Ответ: от 2 до 5 чисел

9 класс

Комбинаторика

Заведующая библиотекой, увидев, что 8 томов «Малой энциклопедии козлов» стоят в беспорядке, указала на это библиотекаря. Тот в ответ заявил: «Беспорядок – небольшой, так как каждый том стоит либо на своем месте, либо на соседнем». Сколькими способами можно расставить тома энциклопедии в соответствии с этим условием?

Ответ: 34

В детский сад завезли карточки для обучения чтению: на некоторых из них написан слог МА, на остальных – слог НЯ. Каждый ребенок взял по три карточки и стал составлять слова. Оказалось, что из своих карточек 20 детей могут сложить слово МАМА, 30 детей – слово НЯНЯ, а 40 детей – слово МАНЯ. У скольких детей все три карточки одинаковые?

Ответ: у 10.

Тетрадный лист раскрасили в 23 цвета по клеткам. Пара цветов называется хорошей, если существуют две соседние клетки, закрашенные этими цветами. Каково наименьшее количество хороших пар?

Ответ: 22.

В некоторых клетках таблицы 100×100 стоят крестики. Каждый крестик является единственным либо в строке, либо в столбце. Какое наибольшее количество крестиков может стоять в таблице?

Ответ: 198.

В одной компании было x человек (каждый – рыцарь или лжец). Каждый произнес фразу: «Среди всех остальных (не считая меня) не больше n рыцарей и не больше k лжецов». Чему мог быть равен x в зависимости от n и k ?

Ответ: $n+1 \leq x \leq n+1+k$

Алгебра

При каких целых a уравнение $ax^2+x-a^2=0$ имеет хотя бы один целый корень?

Ответ: $a = 0$.

Решите уравнение

$$\sqrt{x - \sqrt{3 - 8\sqrt{35 - 8\sqrt{19}}}} = 2$$

Ответ: $\sqrt{19}$

Найдите наибольшее значение выражения $(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2$ при условии $a^2+b^2+c^2=1$.

Ответ: 3

Найдите такую пару натуральных чисел n и m , что $\sqrt{n} - \sqrt{m} = \sqrt{1000}$, и сумма $n+m$ наименьшая из всех возможных.

Ответ: $n = 1210, m = 10$.

Известно, что $(2x^2-x+1)(y^2+4y+8)(z^2-2z+3)=7$. Найдите $x+y+z$.

Ответ: -0,75.

Геометрия

H – ортоцентр треугольника ABC , в котором $AC=BN$. Найдите величину угла ABC .

Ответ: 45° и 135°

В прямоугольном треугольнике биссектриса прямого угла делит гипотенузу в отношении $1:4$. В каком отношении делит гипотенузу высота, проведенная из вершины прямого угла?

Ответ: $1:16$

Прямая, проходящая через вершину A и точку E на стороне BC прямоугольника $ABCD$, делит прямоугольник на две части: треугольник ABE и трапецию $AECD$. Известно, что $S_{ABE}/S_{AECD} = 1/6$. Найдите BE/EC .

Ответ: $2/5$

На плоскости построили четыре окружности с центрами в вершинах прямоугольника $O_1O_2O_3O_4$ и радиусами r_1, r_2, r_3, r_4 соответственно. Оказалось, что окружности пересекаются в одной точке. Какие значения может принимать знакопеременная сумма квадратов радиусов $r_1^2 - r_2^2 + r_3^2 - r_4^2$?

Ответ: 0

В трапеции $ABCD$ точка M лежит на боковой стороне CD так, что $\angle ABM = \angle CBD = \angle BCD = \alpha$. Найдите длину BM , если $AB = b$.

Ответ: .

Простые числа

На карточках по одному написаны все целые числа от 1 до 15. Одну карточку потеряли и оказалось, что сумма чисел на остальных карточках – простое число. Какая карточка могла быть потеряна? (Укажите все варианты)

Ответ: 7, 11, 13.

Найдите все тройки простых чисел, в которых одно равно разности кубов двух других.

Ответ: 2, 3 и 19.

Найдите все простые числа, которые равны сумме двух простых чисел и разности двух простых чисел.

Ответ: 5.

Знайка хочет составить число из различных цифр так, чтобы любые две стоящие подряд цифры образовывали простое число. Какое наибольшее число он может получить?

Ответ: 89731.

Сколькими способами число 100 можно представить в виде суммы трех простых чисел? (порядок слагаемых не важен)

Ответ: 4.

Последовательности

В последовательности $\{a_n\}$ сумма любых трёх подряд идущих чисел равна 2004, причём $a_4=668$, $a_{200}=667$. Чему равно a_{2004} ?

Ответ: $a_{2004}=669$.

В последовательности x_1, x_2, \dots, x_{100} каждый член x_k на k больше суммы всех предыдущих членов, $x_1=1$. Найдите сумму первых 100 членов последовательности.

Ответ: $2101 - 102 = 1999$.

Составьте из элементов последовательности $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}$, арифметическую прогрессию длины 5.

Ответ: пример.

Толя выложил в ряд 101 монету достоинством 1, 2 и 3 копейки. Оказалось, что между каждыми двумя копеечными монетами лежит хотя бы одна монета, между каждыми двумя двухкопеечными монетами лежат хотя бы две монеты, а между каждыми двумя трёхкопеечными монетами лежат хотя бы три монеты. Сколько трёхкопеечных монет могло быть у Толи?

Ответ: 25 или 26.

В магазин завезли 20 кг сыра, за ним выстроилась очередь. Отпустив сыр очередному покупателю, продавщица безошибочно подсчитывает средний вес покупки по всему проданному сыру и сообщает, на сколько человек хватит оставшегося сыра, если все будут покупать именно по этому среднему весу. После каждой из первых десяти покупок продавщица сообщала, что сыра хватит еще ровно на 10 человек. Какое количество сыра могло остаться после первых десяти покупок?

Ответ: 10 кг.