

ХІХ Турнір математических боёв им. А. П. Савина
Берендеевы поляны, 26 июня—2 июля 2013 года

Математический квадрат

8 класс • 26 июня 2013 года

Алгебра

А8. В бассейн ведут две одинаковых трубы. Одна труба заполняет бассейн за 3 часа. Сначала включили обе трубы, но через час одна из труб засорилась и через нее вода стала поступать вдвое медленнее. Через сколько времени бассейн заполнится?

А16. Числа a и b удовлетворяют равенству $\frac{2a}{a+b} + \frac{b}{a-b} = 2$. Найдите все возможные значения выражения $\frac{3a-b}{a+5b}$.

А24. Найдите значение выражения

$$1! \cdot 3 - 2! \cdot 4 + 3! \cdot 5 - 4! \cdot 6 + \dots - 2012! \cdot 2014 + 2013!$$

А32. Участники олимпиады устроили вечеринку, договорившись разделить расходы поровну. Получив счет на \$1680, они посчитали было, сколько нужно заплатить каждому участнику, но вдруг заметили, что четыре человека уже ушли, из-за чего взнос каждого из оставшихся возрос на \$1. Сколько человек участвовало в вечеринке?

А40. Сложили числа $9, 99, 999, \dots, 99 \dots 99$ (2011 девяток). Сколько единиц в записи получившейся суммы?

Математический квадрат

8 класс • 26 июня 2013 года

Комбинаторика

К8. Две команды разыграли первенство по десяти видам спорта. За победу в каждом из видов команда получала четыре очка, за ничью — два очка и за поражение — одно. Сумма очков, набранных обеими командами, оказалась равна 46. Сколько было ничьих?

К16. Разрежьте клетчатый квадрат 6×6 клеток на наибольшее число клетчатых прямоугольников, никакие два из которых не являются одинаковыми.

К24. В некоторой компании 100 акционеров и любые 66 из них владеют не менее чем 50% акций компании. Каким наибольшим процентом всех акций может владеть один акционер?

К32. Числа от 1 до 10 в каком-то порядке выписали в строку и получили числа $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{10}$, а затем вычислили суммы $S_1 = a_1, S_2 = a_1 + a_2, S_3 = a_1 + a_2 + a_3, \dots, S_{10} = a_1 + a_2 + \dots + a_{10}$. Какое наибольшее количество простых чисел могло оказаться среди чисел S_1, S_2, \dots, S_{10} (необходимо привести пример)?

К40. Как в 16 клетках квадрата 5×5 провести по диагонали так, чтобы никакие две нарисованные диагонали не имели общей точки (даже общего конца)?

Математический квадрат

8 класс • 26 июня 2013 года

Логика

Л18. Иван Иванович купил собаку. Саша думает, что эта собака – чёрный пудель, Паша считает ее белой болонкой, а Маша – белым бультерьером. Известно, что каждый из ребят верно угадал либо породу, либо цвет шерсти собаки. Назовите породу собаки и цвет ее шерсти.

Л16. На острове у компании из 5 аборигенов было 10 монет. Первый заявил: «У меня — 1 монета», второй: «У меня — 2 монеты», . . . , пятый: «У меня — 5 монет». Сколько могло быть среди них лжецов?

Л24. На планете Куб (разумеется, имеющей форму куба) каждой гранью владеет правдолюб (который всегда говорит правду) или лжец (который всегда врет). Каждый из них утверждает, что не менее трёх из его соседей — лжецы. Сколько правдолюбов и сколько лжецов владеют гранями планеты (необходимо указать все возможные варианты)?

Л32. Есть 100 комнат и 100 мальчиков, каждый из которых находится в одной из комнат. На двери каждой комнаты написано: «Тут ровно один мальчик». Назовём комнату нечётной, если в ней находится нечётное число мальчиков. Найдите количество нечётных комнат, если известно, что среди надписей на комнатах — ровно четыре неверных.

Л40. Про натуральное число n известно три факта:

- 1) Если оно делится на 3, то оно лежит между 50 и 59 включительно;
 - 2) Если оно не делится на 4, то оно лежит между 60 и 69 включительно;
 - 3) Если оно не делится на 6, то оно лежит между 70 и 79 включительно.
- Чему может быть равно число n ?

ХІХ Турнир математических боёв им. А. П. Савина
Берендеевы поляны, 26 июня—2 июля 2013 года

Математический квадрат

8 класс • 26 июня 2013 года

Теория чисел

ТЧ8. Найдите треугольник, градусная мера каждого угла которого выражается простым числом.

ТЧ16. На доске написана правильная несократимая дробь. Петя прибавил к её числителю единицу (сохранив знаменатель), а Вася вычел из её знаменателя числитель (сохранив числитель). Получились равные дроби. Какая дробь могла быть написана исходно? Найдите все возможности и докажите, что других нет.

ТЧ24. Найдите три натуральных последовательных числа, сумма которых оканчивается на 2013, с наименьшей возможной суммой.

ТЧ32. Решите в целых числах уравнение:

$$10x + y = x^2 + y^2 - 13.$$

ТЧ40. a — натуральное число, простое число p делит $5a - 1$ и $a - 10$. Найдите p .

Математический квадрат

8 класс • 26 июня 2013 года

Геометрия

Г8. Биссектрисы треугольника ABC пересекаются в точке I . Через точку I проходят две прямые, которые параллельны прямым AB и AC и пересекаются с BC в точках D и E . Найдите периметр треугольника IED , если $AB = 10$, $BC = 11$, $CA = 12$.

Г16. В трапеции $ABCD$ с основаниями AB и CD $\angle ABC = 65^\circ$ и $\angle ADC = 130^\circ$. Биссектриса угла ADC пересекает отрезок AB в точке E . Известно, что $AD = 12$ и $BE = 15$. Найдите среднюю линию трапеции

Г24. Биссектриса угла A параллелограмма $ABCD$ пересекает сторону BC в точке M , а биссектриса угла AMC проходит через точку D . Найдите углы параллелограмма, если известно, что $\angle MDC = 45^\circ$.

Г32. В прямоугольном треугольнике центр вписанной окружности оказался равноудален от вершины прямого угла и середины гипотенузы. Найдите острые углы этого треугольника.

Г40. В равнобедренном треугольнике ABC ($AB = AC$) $\angle A = 30^\circ$. На медиане AD взята точка P , а на стороне AB — точка Q таким образом, что $PB = PQ$. Найдите угол PQC .